DIE PROBLEMATIK DES INDUKTIVEN SCHLIESSENS

BEI CARNAP UND RICHTER

von

Jürgen Humburg

Diplomarbeit bei Professor H. Richter

München 1964

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit geht aus von einem Vergleich des Systems der Wahrscheinlichkeitstheorie von Richter [R] mit dem System der induktiven Logik von Carnap [C].

Dieser Vergleich ergibt, daß die Wahrscheinlichkeit$_1$ von Carnap als Chance im Sinne von Richter verstanden werden kann. Das System von Richter ist dabei etwas komplexer als das von Carnap, sodaß man sagen kann: Das System von Carnap stellt einen Spezialfall des Systems von Richter dar.

Nach diesem Vergleich unterziehen wir das System von Carnap einer Kritik, die ergibt, daß dieses System weder ausreicht das induktive Schließen zu rechtfertigen noch es zu beschreiben. Die Carnapsche Theorie ist nur unter gewissen Voraussetzungen richtig, die sich jedoch innerhalb des Carnapschen Systems nicht formulieren lassen.

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Carnapschen Theorie lassen sich innerhalb des Systems von Richter formulieren. In §6 findet sich eine Zusammenstellung dieser Voraussetzungen.

Mit den Begriffen der mathematischen Statistik können wir unsere Kritik an dem System von Carnap auch wie folgt formulieren: Die Carnapsche Theorie ist nur dann richtig, wenn gewisse statistische A-priori-Hypothesen erfüllt sind.

Unsere Kritik des Systems von Carnap ähnelt zum Teil den Überlegungen von Goodman [G]. Wir werden deshalb in §4 kurz auf die Theorie des "entrenchment" von Goodman eingehen, die sich als problematisch erweisen wird.

In §5 untersuchen wir den Anspruch des Systems von Richter, die Herkunft statistischer A-priori-Hypothesen zu erklären. Es stellt sich heraus, daß wir diesen Anspruch aufgeben müssen.

Wie das System von Carnap sollte das System von Richter das induktive Schließen, den Prozeß der empirischen Erkenntnis beschreiben. Unsere Untersuchung ergibt nun, daß eine Änderung unserer Vorstellungen über die Natur auf Grund des Systems von Richter erst dann möglich ist, wenn wir bereits gewisse Kenntnisse über die Natur haben. Das System von Richter kann nicht erklären, wie wir aus einem Zustand des "Nichtwissens" zu dem eines "Wissens" gelangen. Insbesondere liefert das System von Richter keine Erklärung für die Annahme gewisser statistischer A-priori-Hypothesen.

Zu Beginn der Arbeit, in §1 und §2, geben wir eine kurze Darstellung der Systeme von Carnap und Richter.

Im Anhang zu §1 zeigen wir, daß sich in dem Axiomensystem von Carnap ein Axiom entbehren läßt;dies ergibt eine interessante Vereinfachung des Prinzips der Induktion.Außerdem zeigen wir,daß sich der Begriff der Nullbestätigung,dh. a-priorischer Wahrscheinlichkeiten,beim Aufbau der induktiven Logik von Carnap entbehren läßt.

Bezeichnungen

Wir verwenden - als Bestandteil der Umgangssprache - die folgenden logistischen Zeichen:

Logische Implikation."$A \succ B$" : aus A folgt B .

Logische Äquivalenz. "$A \mathrel{\succ\!\!\prec} B$" : A ist gleichwertig mit B ;

Definierender Doppelpunkt. "$A :\mathrel{\succ\!\!\prec} B$" : A definitionsgemäß gleichwertig mit B ;

"$a := b$" : a definitionsgemäß gleich b ;

Wir benutzen den maßtheoretischen Formalismus von Richter [R']:

$\{x \in M : A(x)\} := \{x : x \in M$ und $A(x)\}$. 0 bezeichnet die leere Menge.

$A.B :=$ Durchschnitt der Mengen A und B .

$\bar{A} :=$ Komplement der Menge A (bezüglich einer Grundmenge M , $A \subset M$).

$\sum' A_i$ ($\prod' A_i$) := Vereinigung (Durchschnitt) der Mengen A_i .

$\prod'_{i \in I} M_i$:= Cartesisches Produkt der Mengen M_i .

Im abzählbaren Fall schreiben wir dafür auch: $(M_1, M_2, \ldots)$ mit den Elementen $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Teilmengen von M .

${}^K\mathcal{G}$:= kleinster Mengenkörper,dh. kleinste Boolesche Algebra,die $\mathcal{G}$ umfaßt.

${}^B\mathcal{G}$:= Borelsche Erweiterung von $\mathcal{G}$:= kleinster σ-Körper (σ-Algebra), der $\mathcal{G}$ umfaßt.

Sei $A \subset \prod'_{i \in I'} M_i$, $I' \subset I$ .Dann verstehen wir unter dem Zylinder aus $\prod'_I M_i$ zur Basis A die folgende Menge:

$Z(A) := \{x \in \prod'_I M_i : x^+ \in A$,sofern $x^+_i = x_i$ für alle $i \in I'\}$.

Unter dem direkten Produkt der Mengenkörper $\mathcal{G}_i$ über den Grundmengen M_i verstehen wir den folgenden Mengenkörper über $\prod' M_i$:

$\prod^x_I \mathcal{G}_i := {}^K\{Z(X) \subset \prod'_I M_i : X \in \mathcal{G}_j$ für ein $j \in I\}$.

Endliche oder abzählbare Vektoren $(x_1, x_2, \ldots)$ bezeichnen wir mit x , $\vec{x}$, (x_i) oder $\mathfrak{x}$.

Buchstaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

§1. Das System der induktiven Logik von Carnap

(1.1) Fragestellung

Die induktive Logik hat die Aufgabe, das induktive Schließen zu beschreiben und zu rechtfertigen. Unter einem induktiven Schluß verstehen wir dabei den Schluß von einer Prämisse auf eine Hypothese, die logisch über diese Prämisse hinausgeht. Ein solcher Schluß besitzt keine strenge Gültigkeit, sondern ist immer nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit möglich. Die folgenden Aussagen bilden ein Beispiel für solche Schlüsse:

Durch die Beobachtung e wird die Hypothese h in hohem Maße bestätigt.
h ist im Hinblick auf e von großer Wahrscheinlichkeit.
h ist auf Grund von e als gesichert zu betrachten.

Die induktive Logik von Carnap stellt sich nun die folgende Aufgabe: Die intuitiv gebrauchte Aussage, daß eine Hypothese h durch eine Beobachtung e gestützt wird, soll durch Angabe einer Zahl c(h,e) präzisiert werden, die ein Maß dafür darstellt, wie *stark* h durch e gestützt wird; diese Zahl heißt dabei die *induktive Wahrscheinlichkeit* von h auf Grund von e.

Die Lösung dieser Aufgabe besteht in der Definition einer Funktion c(h,e), die jedem Paar von Sätzen eine Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet, sodaß c(h,e) als Maß für die Sicherheit von h auf Grund von e interpretiert werden kann. Die Aussage c(h,e) = p soll dabei eine auf Grund der Definition von c rein logisch entscheidbare Beziehung ohne jeden empirischen Gehalt sein. Mit anderen Worten gesagt soll c(h,e) die Wahrscheinlichkeit sein, die h aus rein logischen Gründen im Hinblick auf e besitzt; c(h,e) heißt deshalb auch die *logische* Wahrscheinlichkeit von h auf Grund von e.

Noch genauer können wir den Begriff der induktiven Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Begriffs der fairen Wette charakterisieren: c(h,e) soll ein Maß dafür sein, mit welchem Verhältnis der Einsätze wir auf die Richtigkeit von h bei Kenntnis der Richtigkeit von e wetten sollen; c(h,e) läßt sich dann als "fairer Wettquotient" interpretieren - eine Interpretation, die sofort einige der Axiome liefert, die wir im folgenden von der Funktion c(h,e) verlangen werden. Genaueres findet sich in [C], Seite 42.

Der Begriff der induktiven Wahrscheinlichkeit, von Carnap auch Wahrscheinlichkeit$_1$ genannt, ist scharf zu unterscheiden von anderen Begriffen der Wahrscheinlichkeit, insbesondere dem Begriff der *objektiven* oder *statistischen* Wahrscheinlichkeit, wie er etwa in §2 entwickelt wird; wir werden auf diese Unterscheidung verschiedener Wahrscheinlichkeitsbegriffe nochmals in (3.1) genauer zu sprechen kommen.

Die induktive Wahrscheinlichkeit c(h,e) wurde von Carnap ursprünglich auch als Grad der Bestätigung expliziert, den eine Hypothese h durch eine Beobachtung e erfährt. Die Funktion c(h,e) heißt deshalb bei Carnap auch B e s t ä t i g u n g s f u n k t i o n , kurz B - f u n k t i o n . Neuerdings betrachtet Carnap diese Bezeichnungen als irreführend +). Wir wollen hier diese Bezeichnungen als termini technici dennoch beibehalten.

Carnap beantwortet die Frage nach einer B-funktion c(h,e) für Sätze h , e aus einem bestimmten formalen Sprachsystem L . Und zwar wird die Funktion c(h,e) für ein solches Sprachsystem durch eine Reihe von Axiomen festgelegt, die sich aus dem angegebenen Zweck dieser Funktion, das induktive Schließen zu beschreiben, motivieren lassen.

(1.2) Das Sprachsystem L

Wir geben eine kurze Darstellung des Sprachsystems L ; genaueres siehe [C], Seite 138ff.

a) L enthält:

N Individuenkonstanten "a_1",...,"a_N"; $1 \leq N \leq \infty$ ($N = \infty$ symbolisiert dabei den Fall abzählbar unendlich vieler Individuenkonstanten).

Unendlich viele Variable "x","y",... für den Individuenbereich, der durch die obigen Individuenkonstanten gegeben ist.

Eine Familie von einstelligen Grundprädikaten "P_1",...,"P_k" ,die auf dem Individuenbereich definiert sind; $1 < k < \infty$.

Die folgenden logischen Zeichen:

"$\neg$" Negation, "." Konjunktion, "v" Disjunktion, "$\rightarrow$" Implikation, "$\equiv$" Äquivalenz, "$\forall x$ ", "$\exists x$ " All- und Existenzoperator (die Variable der Quantoren bezieht sich dabei auf den Individuenbereich).

Das Zeichen "=" für die Identität von Individuen.

"t" als Zeichen für die Tautologie. Klammern "(",")" als Hilfssymbole.

Die Sätze von L sind die auf die übliche Weise mit diesen Mitteln bildbaren Sätze; wir bezeichnen die Menge dieser Sätze ebenfalls mit L . Um die jeweilige Anzahl der Individuenkonstanten anzugeben, schreiben wir manchmal statt L auch L_N.

b) Ist r ein Satz von L , so soll "$\vdash r$" bedeuten, r ist aus rein logischen Gründen wahr, kurz L - w a h r ; analog bedeutet "$\vdash \neg r$", r ist L-falsch.

+) Nach der jetzigen Auffassung Carnaps entspricht es mehr dem Gebrauch der Umgangssprache, wenn wir den Begriff "Bestätigung" als den Zuwachs der logischen Wahrscheinlichkeit explizieren, den eine Hypothese h durch eine Beobachtung e erfährt, verglichen mit der logischen Wahrscheinlichkeit, die h a-priori besitzt; am einfachsten läßt sich dieser Begriff der Bestätigung durch die folgende Differenz darstellen: c(h,e) - c(h,t); c(h,t) ist dabei die A-priori-Wahrscheinlichkeit von h. (Genaueres siehe [C'] Vorwort zur zweiten Auflage, xvii)

Ein Satz heißt L - d e t e r m i n i e r t ,wenn er L-wahr oder L-falsch ist.
Ein Satz heißt g e n e r e l l ,wenn er mindestens einen Quantor enthält.

c) Ist $N < \infty$, so lassen sich die Sätze der Gestalt $\exists x Fx$, $\forall x Fx$ +) durch die folgenden logisch äquivalenten Ausdrücke ersetzen:

$$(Fa_1)v\ldots v(Fa_N) \ , \ (Fa_1)\ldots(Fa_N) \ .$$

Ist $N < \infty$,so sind also alle in L_N bildbaren Sätze logisch äquivalent zu endlichen aussagenlogischen Verknüpfungen der "Atomsätze" "$P_i a_j$".

d) Über die Grundprädikate "P_1",...,"P_k" machen wir noch die Voraussetzung, daß "P_1",...,"P_k" eine vollständige logische Disjunktion bilden, dh. es soll gelten:
$\vdash \neg(P_i.P_j)a$ für $i \neq j$, $\vdash (P_1 v\ldots vP_k)a$;a ist eine beliebige Individuenkonstante.
(Der Ausdruck "(M.M')a" dient als Abkürzung für den Ausdruck "Ma.M'a"; analoges gilt für die übrigen ausagenlogischen Zeichen)

e) Sei $N < \infty$;dann verstehen wir unter einer Z u s t a n d s b e s c h r e i b u n g von L_N einen Satz der folgenden Gestalt:

$$"P_{i_1}a_1\ldots P_{i_N}a_N".$$

Es gilt:
Jede Zustandsbeschreibung ist f a k t i s c h ,dh. nicht L-determiniert.
Zwei Zustandsbeschreibungen sind entweder logisch äquivalent oder kontradiktorisch.
Jeder Satz von L_N läßt sich als Disjunktion von Zustandsbeschreibungen darstellen.
Ein Satz z von L_N ist genau dann eine Zustandsbeschreibung,wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
1) z ist nicht L-falsch (also: nicht $\vdash (z \equiv \neg t)$).
2) Ist h ein Satz aus L_N mit der Eigenschaft $\vdash h \rightarrow z$,so gilt $\vdash \neg h$ oder $\vdash h \equiv z$.

f) Carnap behandelt auch den Fall,daß L mehrere Familien von Prädikaten enthält.Wir beschränken uns hier auf Sprachsysteme mit nur einer Familie von Prädikaten.

(1.3) Das Axiomensystem für die Bestätigungsfunktion c(h,e)

Wir geben eine kurze Darstellung der von Carnap formulierter Axiome für die B-funktion c(h,e); h , e sind dabei Sätze eines Sprachsystems L

+) "F" stellt hier eine metasprachliche Variable für die Prädikate von L dar.Bereits in b) gebrauchten wir lateinische Buchstaben als metasprachliche Namen für Gegenstände aus L .Wir werden dies auch im folgenden tun.Außerdem gebrauchen wir die Konvention,daß ein objektsprachliches Zeichen innerhalb einer metasprachlichen Formel als sein eigener metasprachlicher Name fungiert.(Genaueres siehe [C],138ff.)

der oben geschilderten Art.

Auf die Motivierung dieser Axiome aus der in (1.1) formulierten Vorstellung gehen wir hier nicht ein.

Eine ausführlichere Darstellung dieses Axiomensystems findet sich in [C], Anhang B.

Generelle Voraussetzung: Die Prämisse e in c(h,e) sei nicht L-falsch.

Grundaxiome

NA1. $0 \leq c(h,e) \leq 1$.

NA2. Wenn $\vdash e \rightarrow h$,dann $c(h,e) = 1$.

NA3. Additionsprinzip. Wenn $e.h.h'$ L-falsch, dann gilt:

$c(h \vee h',e) = c(h,e) + c(h',e)$.

NA4. Multiplikationsprinzip. Ist $e.h$ nicht L-falsch, so gilt:

$c(h.h',e) = c(h,e)c(h',e.h)$.

NA5. Wenn $\vdash e \equiv e'$ und $\vdash h \equiv h'$,dann $c(h,e) = c(h',e')$.

Regularitätsaxiom

NA6. Sind h , e Sätze von L_N mit $N < \infty$, so gilt:

Aus $c(h,e) = 1$ folgt $\vdash e \rightarrow h$.

Invarianzaxiome

NA7. c(h,e) ist invariant bei Permutation der Individuen.

NA8. c(h,e) ist invariant bei Permutation der Grundprädikate.

Diese beiden Axiome ergeben sich aus der Forderung, daß c(h,e) nur von der logischen Struktur von h , e abhängt, nicht aber von den speziellen in h , e vorkommenden Individuen und Grundprädikaten.

NA9. Entfällt wegen (1.2f).

NA10. Enthalten h , e keine Quantoren, so ist c(h,e) unabhängig von der Gesamtzahl N der in L betrachteten Individuen.

NA11. Entfällt ebenfalls wegen (1.2f).

Axiom der Relevanz von Einzelfällen

NA12. e enthalte keine Quantoren. a , b seien zwei verschiedene Individuenkonstanten, die beide in e nicht vorkommen; M ein faktisches Molekularprädikat, dh. M = "$P_{i_1} \vee \ldots \vee P_{i_s}$" mit $1 \leq s < k$.

Dann gilt:

a) $c(Mb,e.Ma) \geq c(Mb,e)$,+).

b) $c(Mb,e.Ma) \neq c(Mb,e)$.

Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese soll also mit jeder positiven Instanz zunehmen.

NA13. Entfällt ebenfalls wegen (1.2f).

+) NA12a ist überflüssig; siehe Anhang A dieses Paragraphen.

Axiom der Voraussageirrelevanz

NA14. e beschreibe eine Stichprobe vom Umfang s, dh. e gebe an, welches der P_i den einzelnen Individuen der Stichprobe zukommt; e_1 entstehe aus e dadurch, daß alle "P_i" mit $i \neq 1$, die in e vorkommen, durch "$\neg P_i$" ersetzt werden; a sei eine Individuenkonstante, die nicht in e vorkommt. Dann gilt: $c(P_1 a, e) = c(P_1 a, e_1)$.

Die Bestätigung von "$P_1 a$" auf Grund einer Stichprobe soll also nur davon abhängen, wie oft P_1 und $\neg P_1$ in dieser Stichprobe vorkommen.

NA15. Für den Fall, daß es nur zwei Grundprädikate gibt, also $k = 2$ beträgt, ist ein spezielles, zusätzliches Axiom nötig, das hier nicht wiedergegeben wird; eine Formulierung dieses Axioms findet sich im Anhang zu §1, (B.3g).

NA16. Entfällt ebenfalls wegen (1.2f).

Axiom des unendlichen Individuenbereiches

NA17. Die B-funktion in L_∞ soll sich als Limes der B-funktionen der endlichen Systeme darstellen lassen.

Das ist wie folgt zu verstehen: Zu jedem Satz h_∞ aus L_∞ läßt sich in allen Systemen L_N mit N größer einem geeigneten N' das Analogon h_N bilden. Ist h_∞ nicht generell, so haben h_N und h_∞ dieselbe Bedeutung; im anderen Fall ist die Bedeutung dieser Sätze verschieden, da sich die Quantoren in h_∞ und h_N auf verschiedene Individuenbereiche beziehen. Das obige Axiom besagt nun: $c(h_\infty, e_\infty) = \lim_{N\to\infty} c(h_N, e_N)$; existiert dieser Limes nicht, so ist $c(h_\infty, e_\infty)$ nicht definiert. Sind h_∞, e_∞ nicht generell, so gilt nach NA10: $c(h_\infty, e_\infty) = c(h_N, e_N)$.

(1.4) Die Nullbestätigung m(h)

Nach NA4, NA6 gilt für $N < \infty$:

$c(h,e) = m(h.e)/m(e)$ mit $m(h) := c(h,t)$.

Die Werte von c lassen sich also für $N < \infty$ durch die Werte von m darstellen.

$m(h)$ stellt die "Bestätigung" von h durch die tautologische Prämisse "t" dar. $m(h)$ heißt dementsprechend N u l l b e s t ä t i g u n g.

$m(h)$ läßt sich etwa als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, die h aus rein logischen Gründen besitzt.

Im Anhang B zu diesem Paragraphen wird gezeigt, daß die Benutzung einer solchen a-priorischen Wahrscheinlichkeit $m(h)$ auf Grund der obigen Axiome ohne zusätzliche Problematik ist.

(1.5) Die Bestätigungsfunktionen $c_\lambda(h,e)$

Die B-funktion $c(h,e)$ ist durch die obigen Axiome bis auf einen reellen Parameter λ eindeutig festgelegt.

In einem Sprachsystem L_N mit $N < \infty$ sind nämlich die Werte für c durch die Werte $m(z)$ der Zustandsbeschreibungen z von L_N festgelegt; dies folgt aus (1.4) und NA3. Sei nun z eine solche Zustandsbeschreibung in der N_i-mal das Prädikat "P_i" vorkommt; dann gilt auf Grund der Axiome (1.3):

$$m(z) = \frac{\prod_{i=1}^{k} (N_i + \lambda/k - 1)^{[N_i]}}{(N + \lambda - 1)^{[N]}} \quad ,0 < \lambda < \infty\,, \ \sum_{i=1}^{k} N_i = N$$

. Der Ausdruck $a^{[n]}$ ist dabei wie folgt definiert: $a^{[n]} := a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)$.

(Der Beweis findet sich in [C], Seite 249ff)

Wir bezeichnen die zu dem Parameter λ gehörende B-funktion mit c_λ. Der Kürze halber unterschlagen wir manchmal den Index λ und gebrauchen dafür die Ausdrucksweise "eine Carnapsche B-funktion c".

(1.6) Die Interpretation des Parameters λ

e beschreibe eine Stichprobe vom Umfang s, in der s_1-mal P_1 und $(s-s_1)$-mal $\neg P_1$ vorkommt; die Individuenkonstante a komme nicht in e vor. Dann gilt:

$$c(P_1 a,e) = \frac{(s_1/s)s + \lambda(1/k)}{\lambda + s} \qquad \text{(Beweis [C], Seite 250)}$$

$c(P_1 a,e)$ entsteht durch gewogene Mittelung aus der "empirischen Wahrscheinlichkeit" s_1/s (relative Häufigkeit von P_1 in der Stichprobe) und der "logischen Wahrscheinlichkeit" $1/k$ (k Prädikate bedeuten k logisch gleichwertige Möglichkeiten). Die "logische" Wahrscheinlichkeit wird mit dem Gewicht λ, die "empirische" mit dem Gewicht s bewertet.

(1.7) Wir wollen in dieser Arbeit nicht auf das Problem eingehen, die B-funktion $c(h,e)$ eindeutig festzulegen, dh. den Parameter λ zu spezialisieren. Überlegungen von Carnap zu diesem Punkt finden sich in [C″], Seite 76ff.

Anhang zu § 1

A) Das Prinzip der Relevanz von Einzelfällen im System der induktiven Logik von Carnap (Eine Vereinfachung des Axiomensystems von Carnap)

(A.1) Satz (Die Entbehrlichkeit von NA12a)

In dem Axiomensystem (1.3) der induktiven Logik von Carnap ist das Axiom NA12a ("die nichtnegative Relevanz von Einzelfällen") überflüssig. Genauer gesagt, ergibt sich NA12a bereits aus den folgenden Axiomen:

NA1 - NA5	Grundaxiome
NA7	Invarianz bei Permutation der Individuenkonstanten
NA10	Unabhängigkeit von der Gesamtzahl N der Individuenkonstanten bei nicht generellen Sätzen.

Wir stehen damit vor dem erkenntnistheoretisch bedeutsamen Sachverhalt, daß sich das Prinzip der Induktion im Rahmen der eben zitierten Axiome auf die Forderung reduziert, die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese beim Eintritt positiver oder negativer Instanzen zu verändern.

Beweis

a) Wir benutzen den folgenden Satz von de Finetti (siehe [F]): $E_1, E_2, \ldots$ sei eine unendliche Folge von Ereignissen eines Wahrscheinlichkeitsfeldes derart, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Durchschnitt von n Ereignissen $E_{i_1} \ldots E_{i_n}$ nur von n (nicht von dem speziellen n-tupel) abhängt; also: $p(E_{i_1} \ldots E_{i_n}) = w_n$. Dann gilt: Es gibt ein normiertes Maß μ auf dem Einheitsintervall, sodaß: $w_n = \int x^n \, d\mu(x)$.

b) Wegen des Axioms NA10 können wir uns auf die Betrachtung des Systems L_∞ beschränken. Jeder Satz eines endlichen Systems L_N ist nämlich nach (1.2c) logisch äquivalent einem nicht generellen Satz von L_N. Jeder Satz von L_N ist in L_∞ enthalten. Der B-grad nicht genereller Sätze ist nach NA10 unabhängig davon, in welchem System wir diese Sätze betrachten.

c) Sei e ein fester Satz, der die Voraussetzungen von NA12 erfüllt. Da e nicht generell ist, gibt es also in L_∞ eine Folge von Individuenkonstanten $b_1, b_2, \ldots$, die alle in e nicht vorkommen. Dann läßt sich ein Wahrscheinlichkeitsfeld $(\mathfrak{K}, p)$ konstruieren, das die Voraussetzungen des Satzes von de Finetti erfüllt:

$$\mathfrak{K} := {}^{E}\prod_{i \geq 1}{}^{x} \mathfrak{K}^i \text{ ,mit } \mathfrak{K}^i := {}^{K}\{\{Mb_i\}, \{\neg Mb_i\}\} .$$

Sei M^j die Grundmenge zu $\mathfrak{R}^j$, also $M^j := \{Mb_j, \neg Mb_j\}$; dann definieren wir die Ereignisse E_i von $\mathfrak{R}$ wie folgt:
$E_i := (M^1, \ldots, M^{i-1}, \{Mb_i\}, M^{i+1}, M^{i+2}, \ldots)$. Es gilt: $\mathfrak{R} = {}^B\{E_1, E_2, \ldots\}$.
Wegen den Grundaxiomen NA1-NA5 führt die folgende Definition zu einem Inhalt $p' | \prod_i^x \mathfrak{R}^i$: $p'(E_{i_1} \ldots E_{i_n}) := c(Mb_{i_1} \ldots Mb_{i_n}, e)$.
Mit Hilfe des Satzes von Kolmogoroff (siehe etwa [R] (V.1.2)) ergibt sich die Existenz eines Maßes $p | \mathfrak{R}$, sodaß: $p | \prod^x \mathfrak{R}^i = p' | \prod^x \mathfrak{R}^i$.
Nach NA7 gilt: $p(E_{i_1} \ldots E_{i_n}) = c(Mb_{i_1} \ldots Mb_{i_n}, e) =: w_n$ hängt nur von n ab. Also existiert nach a) ein μ, sodaß gilt:
$w_1 = c(Mb_1, e) = c(Mb_2, e) = \int x \, d\mu(x)$; $w_2 = c(Mb_1.Mb_2, e) = \int x^2 \, d\mu(x)$.

d) Sei $b_1 = a$ und $b_2 = b$; a, b seien dabei die bei der Formulierung von NA12 eingeführten Individuenkonstanten.
Ist $c(Mb,e) = 0$, so gilt NA12a wegen NA1. Ist $c(Mb,e) = c(Ma,e) > 0$, so gilt nach dem Multiplikationsprinzip und nach c):
$c(Mb, e.Ma) = c(Ma.Mb, e)/c(Ma, e) = \int x^2 \, d\mu(x) / \int x \, d\mu(x)$.
Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt: $(\int x \cdot 1 \, d\mu)^2 \leq \int x^2 \, d\mu \cdot \int d\mu$.
Da $\int d\mu = 1$, folgt: $c(Mb, e) = \int x \, d\mu \leq \int x^2 \, d\mu / \int x \, d\mu = c(Mb, e.Ma)$.

(A.2) <u>Bemerkung (Die Bedeutung von NA10 für die Gültigkeit von NA12a)</u>

NA10 ist wesentlich für die Gültigkeit von (A.1). Es gibt nämlich für endliche Sprachsysteme L_N Funktionen $c(h,e)$, die die Axiome NA1-NA5, NA7 erfüllen, jedoch NA12a verletzen.
Solche Funktionen lassen sich aber nicht auf Sprachsysteme $L_{N'}$ mit beliebig großem N' erweitern, dh. NA10 ist verletzt.

<u>Beispiel</u>

$N = 2$, $k = 2$. Zur Vereinfachung führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: a:= "a_1" , b:= "a_2" , P:= "P_1" , Q:= "P_2" . $c(h,e)$ definieren wir mit Hilfe einer Funktion $m(h)$ gemäß (1.4), indem wir die Werte $m(z)$ für die Zustandsbeschreibungen von L_2 festlegen:
$m(Pa.Qb) = m(Qa.Pb) := 9/20$, $m(Pa.Pb) = m(Qa.Qb) := 1/20$.
NA12a ist verletzt:
$c(Pa, Pb) = m(Pa.Pb)/m(Qb) = 1/10 < 1/2 = c(Pa, t)$.
Diese Funktion $c(h,e)$ läßt sich jedoch nicht auf das System L_3 erweitern. Für die Individuenkonstante d:= "a_3" müßte nämlich gelten:
$m(Pa.Pd) \overset{NA7}{=} m(Pb.Pd) \overset{NA7}{=} m(Pa.Pb) = 1/20$; $m(Qa.Qd) = m(Qb.Qd) = m(Qa.Qb)$ $= 1/20$, analog. Ebenso: $m(Pa.Qb) = m(Pa.Qd) = m(Pb.Qd) = m(Pd.Qa) = m(Pd.Qb)$ $= 9/20$. Das Additionsprinzip NA3 liefert nun:
$m(Pa \vee Pb \vee Pd) = m(Pa \vee (Qa.Pb) \vee (Pd.Qa.Qb)) = m(Pa) + m(Qa.Pb) + m(Pd.Qa.Qb)$ $= 1/2 + 9/20 + m(Pd.Qa.Qb)$.

$m(Pd.Qa.Qb) + m(Pd.Qa.Pb) = m(Pd.Qa) = 9/20$
$m(Pd.Qa.Pb) + m(Pd.Pa.Pb) = m(Pd.Pb) = 1/20$
Also: $m(Pd.Qa.Qb) = 8/20 + m(Pd.Pa.Pb)$, also:
$m(PavPbvPd) = 1/2 + 9/20 + 8/20 + m(Pd.Pa.Pb) > 1$
Widerspruch zu NA1!

(A.3) Satz (Konsequenzen aus einem Verstoß gegen NA12b)

$c(h,e)$ erfülle NA1–NA5, NA7, NA10 sowie NA6 ("Regularität"). c verstoße jedoch gegen NA12b; es gebe also einen Satz e, ein Molekularprädikat M und zwei Individuenkonstanten a, b, sodaß die Voraussetzungen von NA12 erfüllt sind, jedoch im Widerspruch zu NA12b gilt: $c(Mb,e.Ma) = c(Mb,e)$. Dann folgt: NA12b ist "global" verletzt, dh.: Sei $b_1, b_2, \ldots$ eine Folge von Individuenkonstanten, die nicht in e vorkommen und e' ein Satz der Gestalt $e' := Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1} \ldots \neg Mb_s$; dann gilt: $c(Mb_{s+1},e.e') = c(Mb_{s+1},e)$.

Beweis

a) Nach (A.1c) existiert ein Maß μ auf dem Einheitsintervall, sodaß: $c(Mbi_1 \ldots Mbi_n,e) = \int x^n \, d\mu$.

Behauptung: $c(Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1} \ldots \neg Mb_s,e) = \int x^n (1-x)^{s-n} \, d\mu$.

Beweis durch Induktion nach $r := s-n$

1) Induktionsanfang $r = 1$:

$c(Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1},e) + c(Mb_1 \ldots Mb_{n+1},e) = c(Mb_1 \ldots Mb_n,e)$. Also:

$c(Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1},e) = \int x^n \, d\mu - \int x^{n+1} \, d\mu = \int x^n (1-x) \, d\mu$.

2) Induktionsschritt:

$c(Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1} \ldots \neg Mb_{s+1},e) + c(Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1} \ldots \neg Mb_s.Mb_{s+1},e)$
$= c(Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1} \ldots \neg Mb_s,e)$. Also: $c(Mb_1 \ldots Mb_n.\neg Mb_{n+1} \ldots \neg Mb_{s+1},e)$
$= \int x^n (1-x)^s \, d\mu - \int x^{n+1} (1-x)^s \, d\mu = \int x^n (1-x)^{s+1} \, d\mu$.

b) Nach Voraussetzung und wegen NA7 ist NA12b für die Individuenkonstanten b_1, b_2 verletzt, dh.: $c(Mb_2,e) = c(Mb_2,e.Mb_1)$. Für das Maß μ von a) gilt somit: $\int x \, d\mu = \int x^2 \, d\mu / \int x \, d\mu$ ($\int x \, d\mu \neq 0$ nach NA6), und folglich: $(\int x \, d\mu)^2 = \int x^2 \, d\mu \cdot \int d\mu$.

c) Wir benutzen nun den folgenden Satz (Fall der Gleichheit in der Schwarzschen Ungleichung):

Sind $f(x)$, $g(x)$ nach μ quadratintegrierbar, so ist $(\int f(x) \cdot g(x) \, d\mu)^2 = (\int f^2(x) \, d\mu) \cdot (\int g^2(x) \, d\mu)$ genau dann, wenn $f=0$ μ-fast überall oder $g(x) = r \cdot f(x)$ μ-fast überall für eine reelle Zahl r.

Wenden wir diesen Satz auf die unter b) gewonnene Gleichung an, so ergibt sich: $x = r$ μ-fast überall für eine reelle Zahl r. Das Maß μ mißt also dem Punkt r den Wert 1 und allen anderen Punkten den

Wert 0 zu; also $\mu(x) = D(x-r)$,dabei ist $D(y)$ +) die Dirichletsche Sprungfunktion. Es gilt also insbesondere: $\int x^n(1-x)^{s-n}\, d\mu = r^n(1-r)^{s-n}$.

d) $c(Mb_{s+1}, e.e') = c(Mb_{s+1}.e', e)/c(e', e) = r^{n+1}(1-r)^{n-s}/r^n(1-r)^{s-n} = r$
$= c(Mb_{s+1}, e)$; $1 \neq r \neq 0$ nach NA6 .

(A.4) Satz (Die Ableitung von NA12b aus dem "Reichenbachaxiom")

NA12b folgt aus den Axiomen NA1-NA6,NA7,NA10 sowie dem folgenden Prinzip:

Reichenbachaxiom

Sei $b_1, b_2, \ldots$ eine Folge von Individuenkonstanten des Systems L_∞; $Q_1, \ldots, Q_m$ eine Familie von Prädikaten, die eine vollständige logische Disjunktion bilden (also: $\vdash \forall x \neg(Q_i . Q_j)x$ für $i \neq j$, $\vdash \forall x(Q_1 v \ldots v Q_n)x$). $e_1, e_2, \ldots$ sei eine Folge von Sätzen mit den Eigenschaften:

a) Jeder Satz e_s dieser Folge hat die Gestalt: $e_s = Q_{i_1}b_1 \ldots Q_{i_s}b_s$.

b) Für jedes s gilt: $\vdash (e_{s+1} \rightarrow e_s)$.

$s_j(s)$ gebe an, wie oft Q_j in e_s vorkommt. Dann gilt:
$\lim_{s\to\infty} (c(Q_j b_{s+1}, e_s) - s_j(s)/s) = 0$.

(Eine Formulierung des Reichenbachaxioms findet sich unter der Nummer A13 auf Seit 976 des - zur Zeit noch nicht erhältlichen - Schilpp-Bandes über Carnap [S] .Das dort veröffentlichte Axiomensystem der induktiven Logik enthältunter der Nummer A12 ebenfalls das Prinzip der Relevanz von Einzelfällen, sowie unter den analogen Nummern die Axiome NA1-NA6,NA7,NA10 .Nach den hier bewiesenen Sätzen (A.1),(A.4) ist in diesem Axiomensystem das Prinzip A12 der Relevanz von Einzelfällen vollständig ableitbar und somit als Axiom überflüssig.)

Beweis

a) Wäre NA12b verletzt, so würde für eine Folge von Individuenkonstanten $b_1, b_2, \ldots$,die alle in e nicht vorkommen nach (A.3) gelten:
$c(Mb_{s+1}, e.e_s) = c(Mb_{s+1}, e) =: r$; $e_s := e'$, e' wie in (A.3) .

b) Wir wenden das Reichenbachaxiom auf die zweigliedrige Familie M , $\neg M$ an: Sei $n = s$,also $e_s = Mb_1 \ldots Mb_s$,dann gilt: $c(Mb_{s+1}, e_s) \longrightarrow 1$.

c) Aus b) folgt: $c(e.Mb_{s+1}, e_s)/c(e, e_s) \longrightarrow 1$.

Beweis: $c(e, e_s) - c(e.Mb_{s+1}, e_s) = c(e.\neg Mb_{s+1}, e_s) \leq c(\neg Mb_{s+1}, e_s) \longrightarrow 0$.
Nach NA6 ist $c(e, e_s) \neq 0$; dies liefert die Behauptung.

d) $r = c(Mb_{s+1}, e.e_s) = c(e.Mb_{s+1}, e_s)/c(e, e_s) \longrightarrow 1$ .Daraus folgt $r = 1$.
Dies steht im Widerspruch zu NA6 .

+) $D(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$.

B) Die Bedeutung der Nullbestätigung (a-priorischer Wahrscheinlichkeiten) im System der induktiven Logik von Carnap

(B.1) Problemstellung

a) Der in §1 gegebene Aufbau der induktiven Logik von Carnap benutzt infolge der Zulassung tautologischer Prämissen den Begriff der Nullbestätigung, dh. a-priorischer Wahrscheinlichkeiten. (Siehe (1.4))

Das Axiomensystem (1.3) macht nämlich durch die Zulassung tautologischer Prämissen Aussagen über die Beschaffenheit der Nullbestätigung und fordert weiterhin durch den Multiplikationssatz (siehe (1.4)) einen Zusammenhang zwischen der Nullbestätigung und der B-funktion im allgemeinen Falle. Nach dem Beweis von Carnap führt das Axiomensystem (1.3), bei Ausnutzung des Begriffs der Nullbestätigung, dh. bei Verwendung tautologischer Prämissen, zu den B-funktionen c_λ. Noch stärker als hier tritt die Bedeutung der Nullbestätigung im ursprünglichen Aufbau der induktiven Logik von Carnap hervor. (Siehe [C] Teil II)

b) Manche Autoren lehnen den Begriff der Nullbestätigung ab und sehen sich dadurch gezwungen, die gesamte Carnapsche Theorie, insbesondere die B-funktion c_λ, die mit Hilfe dieses Begriffs gewonnen wurde, in Frage zu stellen.

So schreiben etwa:

R. Harrod (Foundations of Induktive Logic, Seite 27, [H]):

"There is no meaning in holding something to be probable in and by itself; and no meaning therefore in postulating an initial prior probability."
"... a flagrant violation of the characterization of probability as a relation between a premise and a conclusion."

H.E. Kyburg (Probability and the logic of rational belief, S.51 , [K]):

"All c-functions defined in the way that Carnap has suggested yield values for the confirmation of a hypothesis on null evidence. This seems a little questionable in itself, ... "

c) Diese Arbeit wird zeigen, daß sich der Begriff der Nullbestätigung in dem in §1 gegebenen Aufbau der induktiven Logik entbehren läßt. Es gilt nämlich:

Satz

Das Axiomensystem (1.3) führt auch bei Ausschluß tautologischer Prämissen zu der B-funktion c_λ.

Wir wollen die Struktur dieser Aussage an einem Beispiel verdeutlichen: Anstelle der B-funktionen $c(h,e)$ betrachten wir die reellen Funktionen $f(x)$ auf dem Einheitsintervall. Als Axiom wählen wir die Forderung der Stetigkeit; den tautologischen Prämissen mögen die Randpunkte des Intervalls entsprechen. Die Menge der Funktionen, die das Axiom erfüllen, wird größer, wenn wir die Randpunkte ausschließen. Im

Gegensatz zu diesem Beispiel sagt der obige Satz, daß die Menge der B-funktionen, die (1.3) erfüllen, durch Ausschluß tautologischer Prämissen nicht vergrößert wird.

Die Funktion der Nullbestätigung $m_\lambda(h)$ stellt so gesehen nur ein mathematisches Mittel dar, die allgemeine B-funktion einfach zu charakterisieren. Eine Interpretation der Funktion $m_\lambda(h)$ als Nullbestätigung ist nicht notwendig aber nach dieser Überlegung gefahrlos möglich.

d) Es ist sinnvoll, die Funktion $m_\lambda(h)$ als Nullbestätigung zu interpretieren.

Die Funktion $m_\lambda(h)$ ist nämlich in diesem Axiomensystem die eindeutig bestimmte Fortsetzung auf tautologische Prämissen der zunächst nur für nichttautologische Prämissen definierten B-funktion. Dies folgt aus dem Beweis von Carnap, daß bei Zulassung tautologischer Prämissen genau die Funktionen c_λ (1.3) erfüllen.

Akzeptieren wir also die Axiome von (1.3) für nichttautologische Prämissen, so gelangen wir fast zwangsläufig zu einem Begriff der Nullbestätigung, als der eindeutig bestimmten Forsetzung der allgemeinen B-funktion auf tautologische Prämissen.

e) Ergebnis

Der Begriff der Nullbestätigung ist nicht als selbstständiger Bestandteil zu dem in §1 gegebenen Aufbau der induktiven Logik nötig. Vielmehr läßt sich dieser Begriff aus diesem Aufbau gewinnen und rechtfertigen.

Für die in der Literatur bestehende Polemik bezüglich des Begriffs der Nullbestätigung ergibt sich damit die folgende Konsequenz:

Eine Ablehnung des Begriffs der Nullbestätigung bedeutet eine Ablehnung der Carnapschen Axiome auch für nichttautologische Prämissen.

Eine Annahme der Carnapschen Axiome für nichttautologische Prämissen bedeutet auch eine Annahme des Begriffs der Nullbestätigung.

(B.2) Der Satz (B.1c) ergibt sich aus den folgenden Sätzen. Zunächst eine Definition:

a) Definition

Sei $e := P_i b_1 \ldots P_i b_n \cdot \neg P_i b_{n+1} \cdot \ldots \neg P_i b_s$, $a \neq b_j$ für $j = 1,\ldots,s$.
Nach den Invarianzaxiomen hängt $c(P_i a, e)$ nur von n , s , k (Zahl der Grundprädikate) ab. Wir können also die folgende Definition vornehmen:

$$G_k(n,s) := c(P_i a, e) \;.$$

Der Kürze halber unterdrücken wir manchmal den Index k und schreiben nur: $G(n,s)$.

b) <u>Satz</u>

Auf Grund der Axiome bei Ausschluß tautologischer Prämissen gilt:

$$G_k(n,s) = \frac{n - (kn - 1)G_k(0,1)}{s - (s - 1)kG_k(0,1)} \quad , \; 0 \leq n \leq s \; .$$

c) <u>Satz</u>

Durch $G(n,s)$ ist $c(h,e)$ auf Grund der Axiome bei Ausschluß tautologischer Prämissen eindeutig bestimmt.

d) <u>Satz</u>

Es gilt: $0 < G_k(0,1) < 1/k$.

Die durch G_k nach c) bestimmte B-funktion ist die Funktion c_λ mit $\lambda := kG_k(0,1)/(1 - kG_k(0,1))$; also $0 < \lambda < \infty$.

Nach d) erfüllen also bei Ausschluß tautologischer Prämissen höchstens die Funktionen c_λ das Axiomensystem (1.3). Da Carnap gezeigt hat, daß c_λ (1.3) erfüllt, ist mit diesen drei Sätzen (B.1c) bewiesen.

(B.3) <u>Beweis von (B.2b)</u>

Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze:

a) <u>Hilfssatz</u>: $s_i \geq 0 \; , \; \sum_{i=1}^{k} s_i = s \quad \succ \quad \sum_{i=1}^{k} G_k(s_i,s) = 1$.

Beweis: $e_F := P_1b_1 \ldots P_1b_{s_1} . P_2b_{s_1+1} \ldots P_2b_{s_1+s_2} . P_3b_{s_1+s_2+1} \ldots . P_kb_s$;
$e_i := P_ib_1 \ldots P_ib_{s_i} . \neg P_ib_{s_i+1} \ldots \neg P_ib_s$. Ist $a \neq b_j$ für $j = 1,\ldots,s$, so gilt nach NA14 : $G(s_i,s) = c(P_ia,e_i) = c(P_ia,e_F)$ und folglich
$1 = \sum_i c(P_ia,e_F) = \sum_i G(s_i,s)$.

b) <u>Hilfssatz</u>: $G_k(1,1) = 1 - (k - 1)G_k(0,1)$.

Der Beweis ergibt sich aus a) mit $(s_1,\ldots,s_k) = (1,0,\ldots,0)$.

c) <u>Hilfssatz</u>: $G_k(s+1,s+1) = 1 - (k - 1)G_k(0,s+1)$.

Beweis: Aus a) mit $(s_1,\ldots,s_k) = (s+1,0,\ldots,0)$.

d) <u>Hilfssatz</u>: $k > 2 \quad \succ \quad G_k(n,s+1) = G_k(0,s+1)G_k(n,s)/G_k(0,s) \; ; \; n \leq s$.

Beweis: $e := P_1b_1 \ldots P_1b_n . P_3b_{n+1} \ldots P_3b_s$, $a,b \neq b_1,\ldots,b_s$; dann gilt:
$c(P_1a.P_2b,e) = c(P_1a,e)c(P_2b,e.P_1a) = c(P_2b,e)c(P_1a,e.P_2b)$.
$c(P_1a,e) = G(n,s)$; $c(P_2b,e) = G(0,s)$; $c(P_1a,e.P_2b) = G(n,s+1)$;
$c(P_2b,e.P_1a) = G(0,s+1)$. Durch Einsetzen ergibt sich:
$G(n,s)G(0,s+1) = G(0,s)G(n,s+1)$.

e) Hilfssatz: $k > 2 \quad \Big\rangle \quad G_k(0,s+1)\left[(G_k(s,s) + G_k(1,s))/G_k(0,s) + k - 2\right] = 1$.

Beweis: $G(s,s+1) + G(1,s+1) + (k-2)G(0,s+1) = 1$; aus a) für $(s,1,0,\ldots,0)$. Ersetzt man $G(s,s+1)$, $G(1,s+1)$ nach Formel d), so erhält man die behauptete Gleichung.

f) Für $k > 2$ ergibt sich (B.2b) durch Induktion nach s .

Induktionsanfang ($s = 1$): Der Fall $n = 0$ ist trivial, der Fall $n = 1$ ergibt sich aus b).

Induktionsschritt. (B.2b) sei richtig für s ; dann gilt:

1) $$G(0,s+1) \overset{e)}{=} \left[G(s,s)/G(0,s) + G(1,s)/G(0,s) + k - 2\right]^{-1}$$
$$= \left[\frac{s - (ks-1)G(0,1)}{s - (s-1)G(0,1)k} \cdot \frac{s - (s-1)kG(0,1)}{G(0,1)} + \frac{(s - (s-1)kG(0,1))(1 - (k-1)G(0,1))}{(s - (s-1)kG(0,1))G(0,1)} + k - 2\right]^{-1}$$
$$= G(0,1)/(s + 1 - skG(0,1)) .$$

2) $$G(n,s+1) \overset{d)}{=} G(0,s+1)G(n,s)/G(0,s) = \frac{n - (kn-1)G(0,1)}{s + 1 - skG(0,1)} , \quad n \leq s ;$$ das ergibt sich aus 1) und aus der Induktionsvoraussetzung.

3) $$G(s+1,s+1) \overset{c)}{=} 1 - (k-1)G(0,s+1) \overset{1)}{=} \frac{s + 1 - (k(s+1) - 1)G(0,1)}{s + 1 - skG(0,1)} ;$$

g) Für den Fall $k = 2$ benötigen wir das Axiom NA15 .

NA15. $G_2(n,s)$ ist bei gegebenem $G_2(0,1)$ und festem s eine lineare Funktion von n .

Die Rechtfertigung dieses Axioms ergibt sich aus der Gültigkeit der analogen Aussage für $k > 2$.

Wir können nun d) , e) auch für $k = 2$ beweisen.

d') Hilfssatz: $G_2(n,s+1) = G_2(0,s+1)G_2(n,s)/G_2(0,s)$, $n \leq s$.

Beweis:

1) $e := P_1b_1\ldots P_1b_n.P_2b_{n+1}\ldots P_2b_s$; $a,b \neq b_i$;
$c(P_1a.P_2b,e) = c(P_1a,e)c(P_2b,P_1a.e) = c(P_2b,e)c(P_1a,e.P_2b)$.
$c(P_1a,e) = G(n,s)$, $c(P_2b,e) = G(s-n,s)$, $c(P_1a,e.P_2b) = G(n,s+1)$,
$c(P_2b,e.P_1a) = G(s-n,s+1)$.
Also: $G(n,s)G(s-n,s+1) = G(s-n,s)G(n,s+1)$.

2) Nach NA15 läßt sich $G(n,s)$ wie folgt darstellen:
$G(n,s) = nf(s) + a(s)$. Setzt man diese Darstellung in die unter 1) gewonnene Formel ein, so ergibt sich: $f(s+1)a(s) = f(s)a(s+1)$, also $[nf(s+1) + a(s+1)]a(s) = [nf(s) + a(s)]a(s+1)$.
Also: $G(n,s+1)G(0,s) = G(0,s+1)G(n,s)$.

e') Die Formel e) ergibt sich für $k = 2$ aus d') und a) völlig analog wie für $k > 2$.

Damit läßt sich derselbe Induktionsbeweis wie unter f) durchführen.

(B.4) Beweis von (B.2c)

a) Hilfssatz: Sei e nicht L-determiniert und z eine Zustandsbeschreibung der folgenden Gestalt: $z = P_1 b_1 \dots P_1 b_{N_1} P_2 b_{N_1+1} \dots P_k b_N$, $N = \sum_{i=1}^{k} N_i$.

($b_1, \dots, b_N$ stellen eine gewisse Reihenfolge der Individuenkonstanten "a_1", …, "a_N" dar). Dann gilt:

$z.e$ ist kontradiktorisch und somit $c(z,e) = 0$ oder

$$c(z,e) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{N_i} c(P_i b_{m_i+j}, e.P_1 b_1 \dots P_i b_{m_i+j-1}) \quad , \quad m_i := \sum_{r=1}^{i-1} N_r \; .$$

Beweis: Sei $z.e$ nicht kontradiktorisch; z_i das i-te Konjunktionsglied von z (also $\vdash z \equiv z_1 \dots z_N$); dann ist auch $z_i.e$ nicht kontradiktorisch und folglich gilt auf Grund des Multiplikationssatzes:

$$c(z,e) = c(z_1,e)c(z_2 \dots z_N, e.z_1) = c(z_1,e)c(z_2,e.z_1)c(z_3,e.z_1.z_2) \dots$$

$$\dots c(z_N, e.z_1 \dots z_{N-1}) = \prod_{j=1}^{N_1} c(P_1 b_j, e.P_1 b_1 \dots P_1 b_{j-1}) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{N_2} c(P_2 b_{N_1+j}, e.P_1 b_1 \dots P_2 b_{N_1+j-1}) \dots \prod_{j=1}^{N_k} c(P_k b_{m_k+j}, e.P_1 b_1 \dots P_k b_{m_k+j-1}) \; .$$

b) Hilfssatz: $c(h, P_r a)$ ist für jedes h durch $G(n,s)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Nach dem Additionssatz dürfen wir uns bei h auf Zustandsbeschreibungen beschränken. Sei z eine beliebige Zustandsbeschreibung; dann läßt sich o.E. annehmen, daß z die gleiche Gestalt wie in a) hat. Ist also $z.P_r a$ nicht kontradiktorisch, so stellt $c(z, P_r a)$ nach a) ein Produkt von Ausdrücken der folgenden Gestalt dar: $c(P_i b_{m_i+j}, P_r a.P_1 b_1 \dots P_i b_{m_i+j-1})$.

Ist $a \neq b_1, \dots, b_{m_i+j}$, dann gilt:

$$c(P_i b_{m_i+j}, P_r a \dots P_i b_{m_i+j-1}) = \begin{cases} G(j-1, m_i+j) & \text{für} \quad i \neq r \\ G(j, m_i+j) & \phantom{\text{für}} \quad i = r \end{cases}$$

Ist $a = b_{m_n+t}$, $m_n+t \leq m_i+j$; dann ist $P_r = P_n$, da $z.P_r a$ nicht kontradiktorisch. Also:

$$c(P_i b_{m_i+j}, P_r a \dots P_i b_{m_i+j-1}) = \begin{cases} G(j-1, m_i+j-1) & \text{für} \quad m_n+t < m_i+j \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad m_n+t = m_i+j \end{cases}$$

c) Hilfssatz: Ist $e.P_r a$ nicht kontradiktorisch, so ist $c(h, e.P_r a)$ für jedes h durch $G(n,s)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: $c(h, e.P_r a) = c(h.e, P_r a)/c(e, P_r a)$; mit b) folgt dann die Behauptung.

d) Hilfssatz: Sei e eine feste nicht L-determinierte Prämisse. Dann gilt: Ist $c(P_r a, e)$ für beliebiges a und beliebiges r durch $G(n,s)$ eindeutig bestimmt, so auch $c(h,e)$ für beliebiges h.

Beweis: Wie unter b) dürfen wir uns bei h wieder auf ein z von derselben Gestalt wie in a) beschränken. Wir müssen wieder zeigen, daß die Ausdrücke $c(P_i b_{m_i+j}, e.P_1 b_1 \dots P_i b_{m_i+j-1})$ eindeutig bestimmt sind. Ist $m_i+j \geq 2$, so folgt dies aus c). Ist $m_i+j = 1$, so ist $c(P_i b_1, e)$ eindeutig nach Voraussetzung.

e) Hilfsatz: Sei e nicht L-determiniert; dann ist $c(P_r a, e)$ für beliebiges a und beliebiges r eindeutig durch $G(n,s)$ bestimmt.

Beweis

1) Wir dürfen uns an Stelle von e auf Prämissen e_o der folgenden Gestalt beschränken: $e_o := M_1 b_1 v \dots v M_n b_n$, M_i sind dabei faktische Molekularprädikate, haben also die Gestalt: $P_{i_1} v \dots v P_{i_s}$, $1 \leq s < k$.

Es gilt nämlich die folgende Aussage (Satz über die konjunktive Normalform; siehe etwa [Hi] §5):

Jeder Satz von L_N läßt sich als (mehrgliedrige) Konjunktion von (mehrgliedrigen) Disjunktionen darstellen; dabei besteht jedes Disjunktionsglied dieser Disjunktionen aus negierten oder unnegierten Atomformeln.

Es läßt sich also annehmen, daß gilt: $e = e'.e_o$ mit einem e_o der obigen Gestalt. Ist nun $c(P_r a, e_o)$ eindeutig bestimmt, so nach d) auch $c(h, e_o)$ und folglich wegen $c(P_r a, e) = c(P_r a.e', e_o)/c(e', e_o)$ auch $c(P_r a, e)$. Man kann sich also auf Prämissen der Gestalt e_o beschränken.

Wir beweisen e) durch Induktion nach n (n "Länge" von e_o).

2) Induktionsanfang $n = 1$. Mit den Abkürzungen $b := b_1$, $M := M_1$, $P :=$ "P_r" haben wir also die folgende Behauptung zu beweisen: $c(Pa, Mb)$ ist durch $G(n,s)$ eindeutig bestimmt.

2.1) Fall: $a = b$.

$M = \bigvee_I P_i$ (M ist eine Disjunktion von Prädikaten "P_i" mit $i \in I$).

2.1a) $r \notin I$, dann $c(Pa, Ma) = 0$.

2.1b) $r \in I$, dann:

$c(P_j a, Ma) = c(Pa, Ma)$, wenn $j \in I$. $\sum_I c(P_j a, Ma) = c(Ma, Ma) = 1$.

Also: $c(Pa, Ma) = 1/|I|$; $|I|$ Mächtigkeit von I.

2.2) Fall: $a \neq b$.

2.2a) $r \notin I$:

$c(Pa, Mb) = c(Pa, \neg Pb.Mb) = c(Pa.Mb, \neg Pb)/c(Mb, \neg Pb)$.

Nach 2.1b): $c(Mb,\neg Pb) = |I|/(k-1)$.

Für $i \in I$ gilt: $c(Pa.P_i b,\neg Pb) = c(P_i b,\neg Pb)c(Pa,P_i b) = [1/(k-1)]G(0,1)$.

Also: $c(Pa.Mb,\neg Pb) = [|I|/(k-1)]G(0,1)$. Also: $c(Pa,Mb) = G(0,1)$.

2.2b) $r \in I$:

$$c(\neg Ma,Mb) = \sum_{i \notin I} c(P_i a,Mb) = (k - |I|)G(0,1) \text{ ;nach 2.2a) .}$$

$c(Pa,Mb) = c(Ma,Mb)/|I| = (1 - (k-|I|)G(0,1))/|I|$.

3) Induktionsschritt. Für n sei die Behauptung gezeigt;

$e := e_o vMb = M_1 b_1 v \ldots vM_n b_n vMb$.

3.1) $c(Pa,e) = c(Pa.Mb,e) + c(Pa.\neg Mb,e) = c(Pa,Mb)c(Mb,e)$
$+ c(\neg Mb,e)c(Pa,\neg Mb.e) = c(Mb,e)[c(Pa,Mb) - c(Pa,\neg Mb.e)] + c(Pa,\neg Mb.e)$.

Nach dem Induktionsanfang 2) ist $c(Pa,Mb)$ eindeutig bestimmt, also nach d) auch $c(h,Mb)$. Da M beliebig war, gilt dasselbe für $\neg M$, also ist auch $c(Pa,\neg Mb.e) = c(Pa.e,\neg Mb)/c(e,\neg Mb)$ eindeutig bestimmt. Wir müssen also nur noch die eindeutige Bestimmtheit von $c(Mb,e)$ beweisen.

3.2) $c(\neg Mb,e) = c(\neg Mb,e.e) = c(\neg Mb.e,e)/c(e,e) = c(\neg Mb.e_o,Mbve_o)$
$= c(\neg Mb,e_o)c(e_o,Mbve_o)$.

3.3) $1 = c(\neg Mb,e) + c(Mb,e) = c(\neg Mb,e_o)c(e_o,e) + c(Mb,e)$;nach 3.2) .

3.4) $c(e_o,e) = c(e_o.Mb,e) + c(e_o.\neg Mb,e) = c(e_o,e.Mb)c(Mb,e)$
$+ c(e_o,e.\neg Mb)c(\neg Mb,e) = c(Mb,e)[c(e_o,Mb.e) - c(e_o,e.\neg Mb)] + c(e_o,e.\neg Mb)$.

Aus 3.3) , 3.4) folgt:

3.5) $c(Mb,e)\{c(\neg Mb,e_o)[c(e_o,e.Mb) - c(e_o,e.\neg Mb)] + 1\}$
$+ c(\neg Mb,e_o)c(e_o,e.\neg Mb) = 1$.

Nach Induktionsannahme ist $c(Pa,e_o)$ eindeutig bestimmt und folglich nach d) $c(h,e_o)$ für jedes h . Nach 3.1) und d) ist $c(h,e.Mb)$, $c(h,e.\neg Mb)$ eindeutig bestimmt. Also ist $c(Mb,e)$ durch 3.5) eindeutig bestimmt.

Damit ist (B.2c) bewiesen.

(B.5) <u>Beweis von (B.2d)</u>

a) $G_k(0,1) \leq 1/k$. Wäre nämlich $G_k(0,1)$ größer $1/k$, also: $G_k(0,1) = 1/k + v$ mit $v > 0$; dann gäbe es ein n und ein s $(n \leq s)$, sodaß $G_k(n,s) \leq 0$ im Widerspruch zu NA1, NA6 .

<u>Beweis</u>

$G(n,s) = Z/N$ mit $Z := n - (kn-1)(1/k + v)$
$N := s - (s-1)(1 + kv)$.

1. Fall: $v \leq \frac{1}{k(k-1)}$; dann $1/k - vk + v \geq 0$.

$n = 1 \;\Big\rangle\; Z = 1 - (k-1)(1/k + v) = 1/k - vk + v \geq 0$.

$s > 1 + 1/kv \;\Big\rangle\; N = s - s - skv + 1 + kv = kv + 1 - skv < 0$.

Für $n = 1$, $s > 1 + 1/kv$ gilt also $Z/N \leq 0$.

2.Fall: $v > \frac{1}{k(k-1)}$;dann gilt für $n = 1$, $s = 1$:

$Z = 1/k - vk + v < 0$, $N = 1 + kv - skv = 1$,also $Z/N < 0$.

b) $G_k(0,1) \neq 1/k$ .Wäre nämlich $G_k(0,1) = 1/k$,so wäre $G_k(0,1) = G_k(1,2)$; dies stünde im Widerspruch zu NA12b .

c) Aus NA6 folgt $G_k(0,1) > 0$.

d) Aus Formel (1.6) ergibt sich,daß das in (B.2d) definierte λ zu einer B-funktion c_λ führt,die für die entsprechenden Argumente mit $G(n,s)$ übereinstimmt.Also ist c_λ die nach (B.2c) durch $G(n,s)$ bestimmte B-funktion.

§2. Das System der Wahrscheinlichkeitstheorie von Richter

(2.1) Intuitiver Hintergrund

Das System der Wahrscheinlichkeitstheorie von Richter sucht den Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit, wie er etwa von v. Mises intendiert wurde, präzis zu entwickeln. Diesem Begriff liegt die Erfahrung zugrunde, daß es Experimente gibt, deren Ergebnis sich nicht vorhersagen läßt, für deren mögliche Ergebnisse jedoch eine durch die Natur des Experimentes objektiv bestimmte Wahrscheinlichkeit angenommen werden darf. Diese Wahrscheinlichkeit drückt sich etwa in der "Konstanz" der relativen Häufigkeiten dieser Ergebnisse bei einer großen Zahl von Wiederholungen des Experimentes aus und kann als eine Art Limes dieser relativen Häufigkeiten interpretiert werden. Das System von Richter entwickelt diesen Begriff für das folgende Modell:

(2.2) Die Versuchskette K

K sei eine *Kette von Versuchsvorschriften*, kurz *Experimenten*, H^i, die in zeitlicher Folge realisiert werden; symbolisch: $K = \overrightarrow{(H^1,\dots,H^n)}$, $1 \leq n \leq \infty$. Jedes Experiment habe abzählbar viele *Ergebnisse* $x^i_j | H^i$. (Genaueres zu diesen Begriffen siehe [R] II §5, V Seite 314)

$\mathfrak{h}^i$ sei der *Ereigniskörper* zu H^i, also $\mathfrak{h}^i = {}^B\{\{x^i_1\},\{x^i_2\},\dots\}$. k_i sei die Anzahl der Ergebnisse von H^i.

$\mathfrak{K}$ sei der *Ereigniskörper* zu K, also $\mathfrak{K} = {}^B\prod_i{}^{\times}\, \mathfrak{h}^i$.

M^i sei die *Ergebnismenge* zu H^i, X^i_j das zu dem Ergebnis $x^i_j | H^i$ gehörende Ereignis aus $\mathfrak{K}$, also

$X^i_j = (M^1,\dots,M^{i-1},\{x^i_j\},M^{i+1},\dots)$.

(2.3) Das Postulat der objektiven Wahrscheinlichkeit

Es wird postuliert, daß jedem Ereignis E aus $\mathfrak{K}$ eine *objektive Wahrscheinlichkeit* $\mathfrak{p}(E)$ zukommt; die Funktion $\mathfrak{p}|\mathfrak{K}$ soll dabei ein *normiertes Maß* auf $\mathfrak{K}$ darstellen.

Dieses Postulat läßt sich wie folgt explizieren:

Für je zwei Ereignisse aus $\mathfrak{K}$ ist in der Natur festgelegt, mit welchem der beiden Ereignisse wir eher zu rechnen haben.

Außerdem soll diese in der Natur vorausgesetzte komparative Wahrscheinlichkeitsstruktur eine quantitative Beschreibung gestatten, die gewissen einfachen Forderungen gehorcht, etwa solchen gewisser stetiger funktionaler Beziehungen (Genaueres siehe [R] §9).Es läßt sich dann zeigen, daß es genau ein normiertes Maß auf $\mathfrak{R}$ gibt ,das diese in der Natur vorausgesetzte komparative Wahrscheinlichkeitsstruktur wiedergibt.(siehe [R] §9,§10,§18).

(2.4) Die Hypothese $\hat{p}(E) = p_o$ mit $0 < p_o < 1$ ist sowohl mit dem Eintritt von E als auch mit dem von $\overline{E}$ verträglich.Beobachtungen führen also zu keiner definitiven Entscheidung darüber,welche Funktion $\hat{p}|\mathfrak{R}$ in der Natur vorliegt.

Beobachtungen haben jedoch einen E i n f l u ß auf unsere V o r s t e l l u n g e n über die Funktion $\hat{p}|\mathfrak{R}$.Insbesondere können wir gestützt auf Beobachtungen eine S c h ä t z u n g der Funktion $\hat{p}$ vornehmen.

(2.5) Die Glaubwürdigkeitsbewertung $\varphi|\mathfrak{P}$

Sei P die Menge aller normierten Maße auf $\mathfrak{R}$.

Wir werden der Aussage,daß sich die Funktion $\hat{p}$ in einer Teilmenge P' von P befindet,abhängig von P' einen gewissen Glauben schenken.Setzen wir voraus,daß sich dieser Glaube durch eine reelle Funktion $\varphi(P')$ beschreiben läßt,so können wir danach fragen,wie diese "Glaubwürdigkeitsbewertung" $\varphi(P')$ bei Beobachtung eines Ereignisses E aus $\mathfrak{R}$ abzuändern ist.Um diese Frage zu beantworten,setzen wir genauer gesagt voraus,daß $\varphi(P')$ ein Maß auf dem folgenden σ-Körper $\mathfrak{P}$ über P darstellt:

$$\mathfrak{P} := {}^{B}\Big\{\{p \in P : E\langle p\rangle \leq a\} \;:\; E \in \mathfrak{R},\ 0 \leq a \leq 1\Big\}.$$

Dabei gilt: $E\langle p\rangle := p(E)$;wir schreiben "$E\langle p\rangle$" statt "$p(E)$",um anzudeuten,daß wir $p(E)$ als Funktion auf P bei festem E auffassen wollen. $\mathfrak{P}$ ist also der Meßbarkeitsring der Funktionen $E\langle p\rangle$ über P .

Ein normales Maß $\varphi|\mathfrak{P}$ mit $\varphi(P) > 0$ heißt eine G l a u b w ü r d i g k e i t s b e w e r t u n g ,kurz G - B e w e r t u n g auf dem H y p o t h e s e n b e r e i c h $\mathfrak{P}$.

Sei $\varphi|\mathfrak{P}$ eine G-Bewertung,die unseren Glauben daran wiedergibt,daß $\hat{p}$ in der betreffenden Menge aus $\mathfrak{P}$ liegt.Dann ergibt sich aus gewissen Forderungen,daß nach Beobachtung von E die Bewertung φ^+ als Maßstab dieses Glaubens zu nehmen ist,wobei:

$$d\varphi^+ = E\langle p\rangle\, d\varphi .$$

(Siehe [R] V;§22,§23)

(2.6) <u>Die Chance</u> $\chi(E;\varphi)$

Ist eine G-Bewertung $\varphi|\mathfrak{P}$ mit $\varphi(P) < \infty$ vorgegeben,so führen gewisse Forderungen zu dem folgenden Schätzwert $\chi(E;\varphi)$ für $\hat{p}(E)$:

$$\chi(E;\varphi) = \int E\langle p\rangle \, d\varphi / \int d\varphi \qquad \text{(siehe [R] V,§23)} .$$

$\chi(E;\varphi)$ stellt ein normiertes Maß auf $\mathfrak{R}$ dar und heißt die C h a n c e von E bei der G-Bewertung φ .

(2.7) <u>Die Chance</u> $\chi(E;\varphi.E')$

Sei φ eine beliebig vorgegebene G-Bwertung auf $\mathfrak{P}$ .Ist E' aus $\mathfrak{R}$ eingetreten,so geht φ in φ^+ über gemäß $d\varphi^+ = E'\langle p\rangle \, d\varphi$.

a) Es gelte $0 < \varphi^+(P) < \infty$.
Man darf dann annehmen, $\hat{p} \in P'$,mit $P' := \{p \in P : E'\langle p\rangle > 0\}$;denn es gilt: $\varphi^+(P - P') = \int_{P-P'} E'\langle p\rangle \, d\varphi = 0,\ \varphi^+(P') = \varphi^+(P) - \varphi^+(P-P') > 0.$

Nach Eintritt von E' darf man also für $E \in \mathfrak{R}$ die Existenz einer bedingten objektiven Wahrscheinlichkeit annehmen:

$$\hat{p}\,(E;E') = \hat{p}(E.E')/\hat{p}(E').$$

(Zum Begriff der bedingten objektiven Wahrscheinlichkeit siehe [R] IV,§16)
Analog zu (2.6) führen wir für $\hat{p}(E;E')$ mit Hilfe von φ^+ den folgenden Schätzwert ein:

$$\chi(E;\varphi.E') := \int_{P'} p(E;E') \, d\varphi^+ \Big/ \int_{P'} d\varphi^+ .$$

$\chi(E;\varphi.E')$ heißt die C h a n c e von E bei E' und φ .
(Der Kürze wegen weichen wir bei dieser Definition von der Darstellung bei Richter ab ,wo diese Definition als Satz erscheint;siehe [R] V,Formel (24.3a))

b) Ist weiterhin $\varphi(P) < \infty$,so gilt der <u>Multiplikationssatz</u>:

$$\chi(E.E';\varphi) = \chi(E;\varphi.E')\,\chi(E';\varphi).$$

Beweis:

$$\frac{\int_P E.E'\langle p\rangle \, d\varphi}{\int_P d\varphi} = \frac{\int_{P'} E.E'\langle p\rangle / E'\langle p\rangle \, d\varphi^+}{\int_{P'} d\varphi^+} \; \frac{\int_{P'} E'\langle p\rangle \, d\varphi}{\int_P d\varphi} .$$

c) Existiert $\chi(E';\varphi) > 0$,so ist $\chi(E;E'.\varphi)$ durch den Multiplikationssatz eindeutig festgelegt.
Existiert $\chi(E';\varphi)$ nicht(dh. $\varphi(P) = \infty$)so ist es dennoch möglich, daß $\chi(E;\varphi.E')$ auf Grund von a) definiert ist.
Ist $\chi(E';\varphi) = 0$,so ist $\varphi^+(P) = 0$; $\chi(E;\varphi.E')$ ist also in diesem Fall nicht definiert.

(2.8) <u>Die Darstellung von $\mathcal{P}$ für den Fall $k_i = k$</u>

Für den später benötigten Fall, daß jedes der H^i genau k Ergebnisse hat, benutzen wir die folgende Darstellung des Hypothesenbereichs $\mathcal{P}$.

a) $p \in P$ läßt sich durch einen abzählbar-dimensionalen Vektor $\vec{p}$ charakterisieren:

$$\vec{p} = (p_j^{i_1 \dots i_s}) \quad \text{mit} \quad p_j^{i_1 \dots i_s} := \begin{cases} p(X_j^{s+1}; X_{i_1}^1 \dots X_{i_s}^s) & \text{für } s > 0 \\ p(X_j^1) & \text{für } s = 0 \end{cases}$$

Wir gebrauchen auch die Darstellung:
$\vec{p} = (p_1, \dots, p_k; p_1^1, \dots, p_k^1; \dots; p_1^k, \dots, p_k^k; p_1^{11}, \dots\ )$.
$\mathcal{P}$ läßt sich also als σ-Körper von Mengen solcher Vektoren darstellen.

b) Sei γ der σ-Körper der Borelschen Mengen über dem (k-1)-dimensionalen Simplex $S := \left\{\vec{x} \in R^k : \sum x_i = 1,\ x_i \geq 0\right\}$, also

$$\gamma = {}^B\left\{U \subset S : U \text{ offen in } S\right\}.$$

$S^{i_1 \dots i_s}$ sei das Simplex zu den Komponenten $p_j^{i_1 \dots i_s}$, $1 \leq j \leq k$; $\gamma^{i_1 \dots i_s}$ analog. Dann gilt:

$$\mathcal{P} = {}^B\prod_{\substack{0 \leq s < n \\ 1 \leq i_r \leq k}}^{\times} \gamma^{i_1 \dots i_s} \qquad (n \text{ auch } \infty).$$

<u>Beweis</u>

1) $S_{j,a} := \left\{\vec{x} \in S : x_j \leq a\right\}$, $\gamma' := {}^B\left\{S_{j,a} : 1 \leq j \leq k,\ 0 \leq a \leq 1\right\}$.

Behauptung: $\gamma' = \gamma$.

Beweis:

a) $S_{j,a} \in \gamma$, da $S_{j,a}$ abgeschlossen in S; also $\gamma' \subset \gamma$.

b) Sei U eine beliebige offene Menge von S. Dann gilt:

$U = S.\sum_{\text{abzählb.}}{}^{\bullet} I_{\vec{a},\vec{b}} = \sum{}^{\bullet} S.I_{\vec{a},\vec{b}}$ mit $I_{\vec{a},\vec{b}} := \left\{\vec{x} \in R^k : \vec{a} < \vec{x} \leq \vec{b}\right\}$.

$I_{\vec{a},\vec{b}}.S = \prod_j{}^{\bullet} \overline{S_{j,a_j}}.S_{j,b_j} \in \gamma'$, also $U \in \gamma'$; also $\gamma \subset \gamma'$.

2) $\mathcal{P}' := {}^B\prod^{\times} \gamma^{i_1 \dots i_s}$; Behauptung: $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

Beweis:

$X_{v_1}^1 \dots X_{v_r}^r \langle \vec{p} \rangle$ $\mathcal{P}$-meßbar nach Definition von $\mathcal{P}$; x/y ist Bairesch, also ist auch $p_t^{v_1 \dots v_r} = X_{v_1}^1 \dots X_{v_r}^r X_t^{r+1} \langle \vec{p} \rangle / X_{v_1}^1 \dots X_{v_r}^r \langle \vec{p} \rangle$ $\mathcal{P}$-meßbar. Also gilt: $Z(S_{t,a}^{v_1 \dots v_r}) := \left\{\vec{p} : p_t^{v_1 \dots v_r} \leq a\right\} \in \mathcal{P}$. $Z(S_{t,a}^{v_1 \dots v_r})$ ist der Zylinder zur Basis $S_{t,a}^{v_1 \dots v_r}$ in $\mathcal{P}'$, hat also die folgende Gestalt:

$Z(S_{t,a}^{v_1\ldots v_r}) = (S;S^1;\ldots;S^{\cdots};S_{t,a}^{v_1\ldots v_r};S^{\cdots};\ldots.)$.

Da $\mathfrak{P}$ σ-Körper ist, folgt aus 1) : $Z(Y) \in \mathfrak{P}$ für jedes $Y \in \mathfrak{Y}^{v_1\ldots v_r}$.
Da $\mathfrak{P}'$ die Borelsche Erweiterung solcher Zylindermengen ist und $\mathfrak{P}$ ein σ-Körper, ist damit die Behauptung bewiesen.

3) Behauptung: $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}'$.

Beweis:

$\mathfrak{R}' := \{E \in \mathfrak{R} : E\langle\vec{p}\rangle\ \mathfrak{P}'\text{-meßbar}\}$; es ist zu zeigen : $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} = {}^B\prod^x \mathfrak{h}^i$.

a) $\mathfrak{R}' \supset \prod^x \mathfrak{h}^i$.

$Z(S_{t,a}^{v_1\ldots v_r}) \in \mathfrak{P}'$, also $p_t^{v_1\ldots v_r}$ $\mathfrak{P}'$-meßbar. Ist E aus $\prod^x \mathfrak{h}^i$, so ist E Ereignis eines endlichen Abschnitts von K; also ist $E\langle\vec{p}\rangle$ eine endliche Summe von endlichen Produkten der $p_j^{i_1\ldots i_s}$, also ist $E\langle\vec{p}\rangle$ ebenfalls $\mathfrak{P}'$-meßbar.

b) $\mathfrak{R}'$ ist σ-Körper.

Wir benutzen den folgenden Satz (siehe etwa [H] Seite 27, Theorem B):

Eine monotone Klasse, die einen Mengenkörper enthält, enthält auch die Borelsche Erweiterung dieses Mengenkörpers; eine Klasse von Mengen heißt dabei monoton, wenn die Vereinigung aufsteigender und der Durchschnitt absteigender Folgen von Mengen aus dieser Klasse wieder in dieser Klasse liegt.

Es genügt also zu zeigen, daß $\mathfrak{R}'$ eine monotone Klasse darstellt.

$E \in \mathfrak{R}' \Big\rangle E\langle\vec{p}\rangle\ \mathfrak{P}'\text{-meßbar} \Big\rangle \bar{E}\langle\vec{p}\rangle = 1 - E\langle\vec{p}\rangle\ \mathfrak{P}'\text{-meßbar} \Big\rangle \bar{E} \in \mathfrak{R}'$.

Es genügt also zu zeigen, daß die Vereinigung jeder aufsteigenden Folge aus $\mathfrak{R}'$ wieder in $\mathfrak{R}'$ liegt.

Sei also $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ aus $\mathfrak{R}'$; dann gilt $\{\vec{p} : E_n\langle\vec{p}\rangle \leq a\} \in \mathfrak{P}'$ und somit, da $\mathfrak{P}'$ σ-Körper, $\prod^{\cdot}\{\vec{p} : E_n\langle\vec{p}\rangle \leq a\} \in \mathfrak{P}'$.

$\prod^{\cdot}\{\vec{p} : E_n\langle\vec{p}\rangle \leq a\} = \{\vec{p} : (\sum^{\cdot} E_n)\langle\vec{p}\rangle \leq a\}$; denn es gilt:

$p(\sum^{\cdot} E_n) = \lim p(E_n)$ und folglich

$p(E_n) \leq a$ für alle $n \Big\rangle p(\sum^{\cdot} E_n) = \lim p(E_n) \leq a$

$p(\sum^{\cdot} E_n) \leq a \Big\rangle p(E_r) \leq p(\sum^{\cdot} E_n) \leq a$ für alle r.

Also ist $(\sum^{\cdot} E_n)\langle\vec{p}\rangle$ ebenfalls $\mathfrak{P}'$-meßbar und somit $\sum^{\cdot} E_n \in \mathfrak{R}'$.

(2.9) <u>Die Übertragung einer G-Bwertung zu der Versuchskette K auf die Versuchskette $K;x_1^1$</u>

a) Sei φ eine G-Bewertung auf dem Hypothesenbereich $\mathfrak{P}$ zu der Versuchskette K; jedes der H^i von K habe wieder genau k Ergebnisse.
Bei der Realisierung von H^1 sei etwa x_1^1 aufgetreten. Dann müssen wir ge-

mäß (2.5) $\varphi | \mathfrak{P}$ durch $\varphi^+ | \mathfrak{P}$ ersetzen. Nach Eintritt von x_1^1 interessiert jedoch nicht mehr der Hypothesenbereich $\mathfrak{P}$ der Versuchskette K, sondern der Hypothesenbereich $\mathfrak{P}'$ der Versuchskette $K' := K;x_1^1 :=$ $= \overrightarrow{(H^2;x_1^1 \,,\, H^3;x_1^1 \,, \ldots\,)}$; dabei bezeichnet "$H^i;x_1^1$" die Versuchsanordnung H^i unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß x_1^1 eingetreten ist.

$\mathfrak{P}'$ läßt sich wie folgt darstellen: $\mathfrak{P}' = {}^{B}\prod_{s>0}{}^{x}\, \gamma^{1 i_2 \ldots i_s}$.

Die G-Bewertung $\varphi^+ | \mathfrak{P}$ liefert uns eine G-Bewertung $\varphi' | \mathfrak{P}'$. Wenn wir nämlich an die Hypothesen aus $\mathfrak{P}$ mit der Bewertung φ^+ glauben, so ist es unmittelbar einsichtig, daß wir an die Hypothesen aus $\mathfrak{P}'$ mit der folgenden Bewertung φ' glauben müssen: $\varphi'(B) := \varphi^+(Z(B))$; dabei ist $Z(B)$ der Zylinder in $\mathfrak{P} = {}^{B}\prod{}^{x}\, \gamma^{i_1 \ldots i_s}$ mit der Basis B aus $\mathfrak{P}' = {}^{B}\prod_{s>0}{}^{x}\, \gamma^{1 i_2 \ldots i_s}$.

b) Bei Richter findet sich eine allgemeinere Definition für die Übertragung einer G-Bewertung φ^+ von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}'$, genannt die x_1^1-Projektion $[\varphi^+]_{x_1^1}$ von φ^+ (siehe [R] V, Definition 14). Wir weisen nach, daß die von Richter definierte Übertragung $[\varphi^+]_{x_1^1}$ mit dem hier definierten φ' übereinstimmt.

<u>Die Definition von</u> $[\varphi^+]_{x_1^1}$

$\mathfrak{R}'$ sei der Ereigniskörper zu K', P' die Menge aller normierten Maße auf $\mathfrak{R}'$, E' ein Ereignis aus $\mathfrak{R}'$. $(\{x_1^1\}, E')$ ist dasjenige Ereignis aus $\mathfrak{R}$, das genau dann eintritt, wenn sowohl x_1^1 als auch E' eintreten. $[\varphi^+]_{x_1^1}$ ist durch die folgende Bedingung definiert:

$$[\varphi^+]_{x_1^1}\,(\{p \in P' : E'\langle p\rangle \leq a\}) = \varphi^+(\{p \in P : (\{x_1^1\}, E')\langle p\rangle / X_1^1\langle p\rangle \leq a\}).$$

<u>Satz</u>: φ' und $[\varphi^+]_{x_1^1}$ sind identisch.

p aus P' ist charakterisiert durch den Vektor $(p_j^{1 i_2 \ldots i_s})$, $s > 0$. Die Wahrscheinlichkeit von E' bei der Hypothese $(p_j^{1 i_2 \ldots i_s})$ ist $E'\langle (p_j^{1 i_2 \ldots i_s})\rangle$. Die Wahrscheinlichkeit von $(\{x_1^1\}, E')$ bei der Hypothese $(p_j^{i_1 \ldots i_s})$ ist $p_1 \cdot E'\langle (p_j^{1 i_2 \ldots i_s})\rangle$. Also:

$$[\varphi^+]_{x_1^1}\,(\{(p_j^{1 i_2 \ldots i_s}) : E'\langle (p_j^{1 i_2 \ldots i_s})\rangle \leq a\})$$
$$= \varphi^+(\{(p_j^{i_1 \ldots i_s}) : p_1 \cdot E'\langle (p_j^{1 i_2 \ldots i_s})\rangle / p_1 \leq a\})$$
$$= \varphi^+(Z(\{(p_j^{1 i_2 \ldots i_s}) : E'\langle (p_j^{1 i_2 \ldots i_s})\rangle \leq a\}))$$
$$= \varphi'(\{(p_j^{1 i_2 \ldots i_s}) : E'\langle (p_j^{1 i_2 \ldots i_s})\rangle \leq a\}) .$$

(2.10) Die Chancen zu der Versuchskette K;E

Sei E ein Ereignis aus $\mathfrak{R}$ der folgenden Gestalt: $E = X^1_{i_1} \dots X^N_{i_N}$. Dann ergibt sich analog zu (2.9), etwa durch sukzessive Anwendung des in (2.9) beschriebenen Verfahrens, aus der Bewertung $\varphi | \mathfrak{P}$ eine Bewertung $\varphi' | \mathfrak{P}'$ zu der Versuchskette $K' := K;E$. (Genaueres siehe [R] V, Satz 8)

Sei E' ein Ereignis der Versuchskette K'; dann läßt sich E' auch als Ereignis von K auffassen. Es gilt:

$$\chi(E';\varphi.E) = \chi(E';\varphi') .$$

(Der Beweis dieser Gleichung findet sich in [R] V, Satz 8 bzw. Formel (24.3a). Genauer gesagt, tritt die obige Gleichung bei Richter als Definition auf, während unsere in (2.7) vorgenommene Definition als Satz erscheint.)

§3. Der Vergleich der Systeme von Carnap und Richter

(3.1) Intuitiv erkennbare Ähnlichkeiten zwischen den Wahrscheinlichkeitsbegriffen von Carnap und Richter

a) Carnap unterscheidet zwischen zwei Begriffen der Wahrscheinlichkeit, den Begriffen Wahrscheinlichkeit$_1$ und Wahrscheinlichkeit$_2$, kurz W_1 und W_2.

Der Begriff W_1 bezeichnet dabei den in (1.1) erläutertenBegriff der induktiven Wahrscheinlichkeit. Ein spezielles Beispiel zu diesem Begriff bildet die von Carnap entwickelte Bestätigungsfunktion c_λ (siehe (1.5)). Ein weiteres Beispiel bildet nach Carnap etwa das System der Wahrscheinlichkeitstheorie von Jeffreys [J].

Der Begriff W_2, auch statistische Wahrscheinlichkeit genannt, wird von Carnap nur intuitiv umrissen: Im Gegensatz zu dem Begriff W_1, der einen rein logischen Sachverhalt betrifft, soll sich der Begriff W_2 auf einen empirischen Sachverhalt beziehen. W_2 soll etwa die auftretende relative Häufigkeit des Ergebnisses "Kopf" beim wiederholten Werfen einer bestimmten Münze charakterisieren. Allgemeiner soll W_2 eine durch Beobachtungen approximativ bestimmbare Eigenschaft realer Phänomene sein, die eng mit dem "Limes" der relativen Häufigkeit eines bestimmten Merkmals in einer Klasse von Ereignissen zusammenhängt und sich etwa als dieser "Limes" explizieren läßt. Ein Beispiel für den Begriff W_2 sieht Carnap in der von v.Mises versuchten Einführung des Begriffs der objektiven Wahrscheinlichkeit [M].

Wir dürfen also den in §2 dargestellten Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit von Richter als eine präzise Durchführung der intuitiven Konzeption W_2 ansehen.

b) Zwischen den Begriffen W_1 und W_2 besteht nach Carnap ein Zusammenhang: In gewissen Fällen läßt sich W_1 als Schätzwert für W_2 auffassen.

W_1 entspricht damit dem Begriff der Chance, die von Richter als Schätzwert der objektiven Wahrscheinlichkeit eingeführt wird (siehe (2.6), (2.7)).

Umgekehrt kann man die Chance $\chi(E; \varphi.E')$ auch als W_1 interpretieren: Die G-Bewertung φ läßt sich als Ausdruck einer - im System von Richter nicht weiter untersuchten - Vorkenntnis ansehen. $\chi(E;\varphi.E')$ kann somit als Bestätigungsgrad der Hypothese "E" auf Grund der Prämisse "$\varphi.E'$" interpretiert werden; der Wert $\chi(E; \varphi.E')$ ist rein logisch durch E, E' und φ festgelegt.

Wird φ lediglich als Parameter der nicht eindeutig festgelegten Chance aufgefaßt, so lassen sich die Chancen noch immer als eine durch φ parametrisierte Klasse von möglichen B-funktionen auffassen: $\chi(E; \varphi.E')$ kann als Bestätigungsgradvon "E" auf Grund von "E" in Abhängigkeit von dem Parameter φ interpretiert werden.

(3.2) Die eben skizzierte Ähnlichkeit zwischen den Begriffen W_1 und Chance soll für die von Carnap entwickelte B-funktion c_λ genau untersucht werden. Die Untersuchung erfolgt in zwei Schritten.

Zuerst wird ohne Beachtung ihrer inhaltlichen Bedeutung die mathematische Struktur der beiden Begriffe verglichen und die Bedingung ermittelt, unter denen die beiden Systeme von isomorpher mathematischer Struktur sind.

Dann wird die Frage untersucht, unter welchen Voraussetzungen bei mathematischer Isomorphie der Begriffe auch eine inhaltliche Äquivalenz vorliegt, dh. unter welchen Voraussetzungen zwei isomorphe mathematische Modelle von W_1 und Chance auch isomorphe Beziehungen zu den Begriffen haben, durch die die inhaltliche Deutung dieser Modelle zustande kommt.

A) Formaler Vergleich

(3.3) Betrachtet man nur die mathematische Struktur des Begriffs Chance, so läßt sich die Chance als eine Funktion χ auf dem Cartesischen Quadrat einer Booleschen σ-Algebra $\mathfrak{K}$ charakterisieren, die bezüglich der Verknüpfungen in $\mathfrak{K}$ einem σ-Additions- und einem Multiplikationssatz gehorcht.

Ähnliches gilt für die B-funktion c_λ von L : L bildet eine Boolesche Algebra, c_λ gehorcht einem Additions- und einem Multiplikationssatz. Der σ-Additivität von χ entspricht - wie wir noch genauer sehen werden - die Limeskonvention NA17.

Wir werden nun untersuchen, wie weit Chance und B-funktion in diesen mathematischen Strukturen übereinstimmen. Zu diesem Zweck führen wir zunächst einige Begriffe ein.

(3.4) Isomorphiebegriffe

Sei (L,c) ein Sprachsystem mit einer B-funktion gemäß §1, $(K,\mathfrak{K},\chi)$ eine formale Versuchskette mit einer Chance gemäß §2; χ beruhe auf einer G-Bewertung φ. f sei ein Homomorphismus von L in $\mathfrak{K}$ (dh. $f(\neg h) = \overline{f(h)}$, $f(h.h') = f(h).f(h')$, $\vdash h \equiv h' \succ f(h) = f(h')$).

a) f heißt i n j e k t i v m o d u l o "$\equiv$" oder kurz i n j e k t i v, wenn gilt: $f(h) = f(h') \succ \vdash h \equiv h'$.
   Bemerkung: Der Zusatz modulo "$\equiv$" wird bei analogen Stellen wie hier im folgenden ebenfalls weggelassen.

b) Ist f surjektiv und injektiv, so heißt f ein I s o m o r p h i s m u s.

c) f heißt ein σ- H o m o m o r p h i s m u s, wenn für jedes Prädikat F von L gilt: $f(\forall xFx) = \prod_{i=1}^{N}{}^{\cdot} f(Fa_i)$ (N auch ∞).
   Analog ist der Begriff σ-Isomorphismus erklärt.

d) f Isomorphismus $\succ$ f σ-Isomorphismus.
   Beweis: Für jede natürliche Zahl r mit $r \leq N$ gilt:
   $\vdash (\forall xFx \longrightarrow Fa_1 \ldots Fa_r)$. Also: $f(\forall xFx) \subset f(Fa_1 \ldots Fa_r) = \prod_{i=1}^{r}{}^{\cdot} f(Fa_i)$.
   Also: $f(\forall xFx) \subset \prod_{i=1}^{N}{}^{\cdot} f(Fa_i)$ (N auch ∞).
   Die Umkehrung ergibt sich analog durch Betrachtung von f^{-1}.

e) (L,c) heißt i s o m o r p h zu $(K,\mathfrak{K},\chi)$, wenn ein Isomorphismus f von L in $\mathfrak{K}$ existiert, sodaß: $c(h,e) = \chi(f(h);\varphi.f(e))$.
   Ist (L,c) isomorph zu $(K,\mathfrak{K},\chi)$, so können wir (L,c) und $(K,\mathfrak{K},\chi)$ wegen d) mathematisch als gleich betrachten.
   Wir werden nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen ein solcher Isomorphismus existiert und wie dieser Isomorphismus dann genauer beschaffen ist. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall $N < \infty$.

(3.5) Notwendige Bedingungen für die Isomorphie von L_N und $\mathfrak{K}$ bei $N < \infty$

Sei $N < \infty$ und f ein Isomorphismus von L_N auf $\mathfrak{K}$. Dann gilt:

a) Die Zustandsbeschreibungen von L_N, "$P_{i_1}a_1 \ldots P_{i_N}a_N$", werden eineindeutig auf die Atome von $\mathfrak{K}$ abgebildet; $\mathfrak{K}$ hat also genau k^N Atome.

Beweis: Es gilt $\vdash (\neg h \,.\, h \equiv \neg t)$, also $f(\neg t) = f(\neg h \,.\, h) = \overline{f(h)}.f(h) = 0$. Nach (1.2e) gilt: z ist eine Zustandsbeschreibung $\Leftrightarrow$ $\big[$nicht $\vdash(z \equiv \neg t)$ und $(\vdash h \rightarrow z \Rightarrow \vdash h \equiv \neg t$ oder $\vdash h \equiv z)\big] \Leftrightarrow$ $\big[f(z) \neq f(\neg t) = 0$ und $(f(h) \subset f(z) \Rightarrow f(h) = 0$ oder $f(h) = f(z))\big]$ $\Leftrightarrow$ $f(z)$ ist ein Atom.

b) $\mathfrak{K} \cong \prod\limits_{i=1}^{N}{}^{x}\, \mathfrak{K}^i$ mit $\mathfrak{K}^i := {}^{K}\{f(P_1 a_i),\dots,f(P_k a_i)\}$.

Beweis:

1) $\mathfrak{K}^i$ hat die Atome $f(P_j a_i)$; denn es ist $f(P_j a_i) \neq 0$ und für $l \neq j$ gilt: $f(P_j a_i).f(P_l a_i) = f(P_j a_i . P_l a_i) = f(\neg t) = 0$.
$\prod\limits_{i}{}^{x}\, \mathfrak{K}^i$ hat also die Atome $(f(P_{i_1} a_1),\dots,f(P_{i_N} a_N))$.

2) Mit $g(\sum\limits_{v}{}^{\cdot}(E_1^v,\dots,E_N^v)) := \sum\limits_{v}{}^{\cdot} E_1^v \dots E_N^v$ ist ein Isomorphismus von $\prod{}^{x}\, \mathfrak{K}^i$ auf $\mathfrak{K}$ gegeben; die Atome von $\prod{}^{x}\, \mathfrak{K}^i$, $(f(P_{i_1} a_1),\dots,f(P_{i_N} a_N))$, werden nämlich durch g eineindeutig auf die Mengen $f(P_{i_1} a_1)\dots f(P_{i_N} a_N) = f(P_{i_1} a_1 \dots P_{i_N} a_N)$ abgebildet; dies sind nach 1) genau die Atome von $\mathfrak{K}$.

c) K läßt sich also formal als eine Koppelung von Versuchen K^i mit den Ereigniskörpern $\mathfrak{K}^i$ auffassen, symbolisch: $K = (K^1,\dots,K^N)$. Dabei enthält $\mathfrak{K}^i$ genau k Atome, die gemäß des vorausgesetzten Isomorphismus' mit den Sätzen "$P_1 a_i$",...,"$P_k a_i$" identifiziert werden können.

(3.6) <u>Die Existenz eines zu (L_N, c) isomorphen Systems $(K, \mathfrak{K}, \chi)$ bei $N < \infty$</u>

Sei $N < \infty$ und $c(h,e)$ eine Funktion zu einem Sprachsystem L_N, die die Grundaxiome und das Regularitätsaxiom (also NA1 - NA6) erfüllt. Dann gibt es eine formale Versuchskette K mit einer Chance χ, sodaß (L_N, c) isomorph ist zu $(K, \mathfrak{K}, \chi)$.

<u>Beweis</u>

a) Entsprechend zu (3.5) machen wir den Ansatz:
$$\mathfrak{K} := \prod_{i=1}^{N}{}^{x}\, \mathfrak{K}^i \quad (\text{also } K = (K^1,\dots,K^N)) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{K}^i := {}^{K}\{\{P_1 a_i\},\dots,\{P_k a_i\}\}.$$
Die folgende Abbildung f stellt dann einen Isomorphismus von L_N auf $\mathfrak{K}$ dar: $f(\bigvee\limits_{I} P_{i_1} a_1 \dots P_{i_N} a_N) := \sum\limits_{I}{}^{\cdot}(\{P_{i_1} a_1\},\dots,\{P_{i_N} a_N\})$. ($\bigvee\limits_{I}$ --- sym- dabei eine endliche Disjunktion von Ausdrücken der Gestalt --- ; $\sum\limits_{I}{}^{\cdot}$--- analog)

b) Die Bedingung $c(h,e) = \chi(f(h); \varphi . f(e))$ ist wegen des Regularitätsaxioms (siehe (1.4)) und der Gültigkeit des Multiplikationssatzes für B-funktion und Chance (NA4, (2.7b)) genau dann erfüllt, wenn gilt:
$$m(h) = \chi(f(h); \varphi).$$

Diese Gleichheit läßt sich etwa mit dem folgenden φ erreichen: $m' := m \circ f^{-1}$ stellt ein normiertes Maß auf $\mathfrak{K}$ dar (also $m' \in P$); denn $\mathfrak{K}$ ist endlich und m additiv nach NA3. φ sei nun die G-Bewertung, die alle Glaubwürdigkeit der Hypothese $\{m'\}$ zuschreibt, also:

$$\varphi(A) := \begin{cases} 1 & \text{sofern } m' \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad A \subset P. \text{ Dann gilt: } \chi(f(h);\varphi) = m'(f(h)) = m(h).$$

(3.7) <u>Die Fragestellung im Fall $N = \infty$</u>

a) <u>Satz</u>: Es gibt keinen zu L_∞ isomorphen σ-Körper $\mathfrak{K}$.

Beweis: Jeder σ-Körper besteht entweder aus endlich oder aus überabzählbar vielen Mengen. L_∞ enthält nur abzählbar viele Sätze. Jeder Satz aus L_∞ besteht nämlich aus endlich vielen Zeichen; L_∞ enthält einen Vorrat von abzählbar vielen Zeichen. Die Menge aller endlichen Untermengen einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

L_∞ ist gewissermaßen zu klein, um isomorph einem σ-Körper zu sein. Dies liegt grob gesprochen daran, daß ein σ-Körper abgeschlossen ist bezüglich einer beliebigen abzählbaren Vereinigung, während eine "abzählbare Disjunktion" von Sätzen aus L_∞ nur dann in L_∞ liegt, wenn diese Sätze eine Folge der Gestalt $Fa_1, Fa_2, \ldots$ bilden. (Die "abzählbare Disjunktion" lautet dann $\exists x Fx$).

b) Wir werden also für $N = \infty$ unsere ursprüngliche Frage nach der Isomorphie von (L_∞, c) und $(K, \mathfrak{K}, \chi)$ zu der Frage abschwächen, ob es einen injektiven σ-Homomorphismus von L_∞ in $\mathfrak{K}$ gibt, sodaß gilt:

$$c(h,e) = \chi(f(h); \varphi \cdot f(e)).$$

(3.8) <u>Notwendige Bedingungen für die Existenz eines injektiven σ-Homomorphismus von L_∞ in $\mathfrak{K}$</u>

a) Sei f ein injektiver σ-Homomorphismus von L_∞ in $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}^i$ sei definiert wie in (3.5b); die Mengen $(E_1, E_2, \ldots)$ aus $\prod_{i \geq 1}^{x} \mathfrak{K}^i$ seien identifiziert mit den Mengen $E_1 \cdot E_2 \cdots$ aus $\mathfrak{K}$. Dann gilt:

$$\prod_{i \geq 1}^{x} \mathfrak{K}^i \subset f(L_\infty) \subset {}^{B}\prod_{i \geq 1}^{x} \mathfrak{K}^i \subset \mathfrak{K}.$$

<u>Beweis</u>

1) Jedes Ereignis aus $\prod_{i \geq 1}^{x} \mathfrak{K}^i =: \mathfrak{K}_0$ ist bereits in einem endlichen Abschnitt $\prod_{1 \leq i \leq N}^{x} \mathfrak{K}^i$ enthalten.

2) Die Beschränkung von f auf L_N ergibt nach (3.5b) einen Isomorphismus von L_N auf $\prod_{1 \leq i \leq N}^{x} \mathfrak{K}^i$; also: $\prod_{1 \leq i \leq N}^{x} \mathfrak{K}^i = f(L_N) \subset f(L_\infty)$,

Daraus folgt nach 1): $\mathfrak{R}_0 \subset f(L_\infty)$.

3) $\prod\limits_{i\geq 1}^{x} \mathfrak{R}^i \subset f(L_\infty) \subset \mathfrak{R}$,also $^{B}\prod\limits_{i\geq 1}^{x} \mathfrak{R}^i \subset \mathfrak{R}$.

4) $^{B}\mathfrak{R}_0 \supset f(L_\infty)$.

Beweis: Jeder Satz h aus L_∞ läßt sich auf die pränexe Normalform bringen, die die folgende Gestalt hat: $h = \bot^n x_n \ldots \bot^1 x_1 F(x_1,\ldots,x_n)$; dabei ist "$\bot^i$" = "$\exists$" oder "$\bot^i$" = "$\forall$" und F ein Prädikat von L_∞, das keine Quantoren enthält. (Siehe etwa [Hi] Seite 94)

Nach Voraussetzung gilt: $f(\bot xFx) = \underset{i\geq 1}{\bot} f(Fa_i)$; "$\bot$" = "$\prod$", "$\sum$" entsprechend. Durch Induktion ergibt sich:

$$f\left[\bot^n x_n \ldots \bot^1 x_1 F(x_1,\ldots,x_n)\right] = f\left[\bot^n x_n\left(\bot^{n-1} x_{n-1} \ldots \bot^1 x_1 F(x_1,\ldots,x_n)\right)\right]$$

$$= \underset{i_n\geq 1}{\bot^n} f\left[\bot^{n-1} x_{n-1} \ldots \bot^1 x_1 F(x_1,\ldots,x_{n-1},a_{i_n})\right]$$

$$= \underset{i_n\geq 1}{\bot^n} \ldots \underset{i_1\geq 1}{\bot^1} f\left[F(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})\right] .$$

$F(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})$ ist ein Satz einer endlichen Sprache L_N ,folglich:

$f(F(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})) \in \prod\limits_{1\leq i\leq N}^{x} \mathfrak{R}^i \subset \mathfrak{R}_0$,also

$\underset{i_n\geq 1}{\bot^n} \ldots \underset{i_1\geq 1}{\bot^1} f(F(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})) \in {}^{B}\mathfrak{R}_0$,also $f(L_\infty) \subset {}^{B}\mathfrak{R}_0$.

b) Gibt es also einen injektiven σ-Homomorphismus von L_∞ in $\mathfrak{R}$,so liegt das Bild von L_∞ in dem Ereigniskörper $^{B}\prod^{x}\mathfrak{R}^{i\,\infty}$ einer formalen Versuchskette $K = (K^1,K^2,\ldots)$;dabei entsprechen gemäß der vorausgesetzten Injektion die Atome von $\mathfrak{R}^i$ genau den Sätzen "$P_j a_i$".

(3.9) <u>Die formale Gleichheit von Chance und B-funktion im Fall $N = \infty$</u>

a) Es gibt einen injektiven σ-Homomorphismus f von L_∞ in den Ereigniskörper $\mathfrak{R}$ einer geeigneten formalen Versuchskette K .

b) Ist $c(h,e)$ eine Funktion, die die Axiome NA1-NA5,NA10,NA17 erfüllt, so gibt es eine Chance χ zu $\mathfrak{R}$,sodaß für alle Prämissen mit $m(e) \neq 0$ gilt: $c(h,e) = \chi(f(h);\varphi.f(e))$.

<u>Beweis</u>

1) Entsprechend zu dem Ergebnis von (3.8b) machen wir den Ansatz: $\mathfrak{R} := {}^{B}\prod\limits_{i\geq 1}^{x} \mathfrak{R}^i$ (also $K = (K^1,K^2,\ldots\ )$) mit $\mathfrak{R}^i$ wie in (3.6a).

Sei M^i die Ergebnismenge zu K^i ,also $M^i := \{P_1 a_i,\ldots,P_k a_i\}$;dann sei f für nicht generelle Sätze analog definiert wie in (3.6a):

$f(\bigvee\limits_{I} P_{i_1} a_1 \ldots P_{i_N} a_N) := \sum\limits_{I} (P_{i_1} a_1, \ldots, P_{i_N} a_N, M^{N+1}, M^{N+2}, \ldots)$.

Ist $f(Fa_i)$ bereits definiert, dann sei $f(\bot xFx) := \underset{i\geq 1}{\bot} f(Fa_i)$.

Durch Induktion folgt dann mit Hilfe der pränexen Normalform, daß f für alle Sätze von L_∞ definiert ist. Nach Konstruktion ist f ein injektiver σ-Homomorphismus.

2) Nach NA3 ist $m \circ f^{-1}$ ein Inhalt auf $\prod^x \mathfrak{R}^i$. Mit Hilfe des Satzes von Kolmogoroff (siehe etwa [R'] (V.1.2)) ergibt sich die Existenz eines Maßes $m' | \mathfrak{R}$ sodaß: $m' | \prod^x \mathfrak{R}^i = m \circ f^{-1} | \prod^x \mathfrak{R}^i$. Es gilt dann weiterhin: $m' | f(L_\infty) = m \circ f^{-1} | f(L_\infty)$. Sei nämlich F ein Prädikat von L_∞, sodaß: $m(Fa_i) = m'(f(Fa_i))$. Dann gilt nach NA17:

$$m(\bot xFx) = \lim_{N\to\infty} m(Fa_1 \bot \dots \bot Fa_N) = \lim_{N\to\infty} m'(f(Fa_1) \bot \dots \bot f(Fa_N))$$

$$= m'(\bot_{i\geq 1} f(Fa_i)) = m'(f(\bot xFx))$$

. Durch Induktion ergibt sich wieder die Behauptung für alle Sätze aus L_∞.

Analog zu (3.6b) gibt es also ein φ sodaß: $c(h,e) = m(h.e)/m(e)$ $= \chi(f(h).f(e);\varphi)/\chi(f(e);\varphi) = \chi(f(h);\varphi.f(e))$ für alle e mit $m(e) \neq 0$.

c) Wir müssen noch den Fall $m(e) = 0$ diskutieren. Wegen des Axioms der Regularität NA6, das wir bei dieser Betrachtung zusätzlich von c voraussetzen wollen, dürfen wir annehmen, daß e generell ist. Es ist nun möglich, daß $c(h,e)$ durch die Limeskonvention NA17 definiert ist. Dieser Fall ist im System von Richter zunächst noch nicht enthalten. Durch ein entsprechendes Axiom ließe sich jedoch auch dieser Fall auf natürliche Weise in das System von Richter aufnehmen.

Ein solcher Satz e kann nämlich niemals Ausdruck einer möglichen Erfahrung sein, da er die Beobachtung von unendlich vielen Individuen erforderte. Die Bestätigung durch eine solche Prämisse e hat also nur als Grenzfall "realer Prämissen" eine Bedeutung und mag dann eine mathematische Vereinfachung gewisser Betrachtungen gestatten. Unter diesem Gesichtspunkt ließe sich jedoch auch im System von Richter ein Axiom einführen, das der Limeskonvention NA17 entspricht und die Definition der Chance auch auf diesen Fall erweiterte.

(3.10) $\varphi | \mathfrak{P}$ ist durch die Bedingung $\chi(E;\varphi) = m'(E)$ nicht eindeutig festgelegt, was wir in §6 noch ausführlich diskutieren werden.

Nach der Überlegung von (3.6b) gibt es zu jedem normierten Maß $p | \mathfrak{R}$ ein φ sodaß: $\chi(E;\varphi) = p(E)$. Es gibt also nicht zu jedem System $(K, \mathfrak{R}, \chi)$ ein isomorphes, bzw. im Sinne von (3.7b) entsprechendes System (L, c_λ).

Das Ergebnis dieses Abschnitts läßt sich damit wie folgt formulieren:

(3.11) <u>Ergebnis</u>

Jede B-funktion c_λ eines Sprachsystems L läßt sich formal als Chance zu einer Versuchskette K auffassen. Dabei läßt sich stets annehmen, daß K formal eine Koppelung von Versuchen K^i darstellt, sodaß die Ergebnisse von K^i gerade die Sätze "$P_j a_i$" sind.

B) Inhaltlicher Vergleich

(3.12) Nachdem wir gesehen haben, daß sich die B-funktion c_λ formal als Chance auffassen läßt, wollen wir untersuchen, ob dasselbe auch bei Beachtung der inhaltlichen Bedeutung der beiden Begriffe gilt.

Zu diesem Zweck müssen wir untersuchen, ob diese beiden Begriffe in gleicher Weise mit anderen Begriffen verknüpft sind. Wir werden diese zunächst sehr intuitive und allgemeine Fragestellung im Verlauf unserer Überlegungen noch genau präzisieren.

Zunächst untersuchen wir, unter welchen Bedingungen, die in (3.11) ermittelte Beziehung zwischen L und K auch eine "inhaltliche Gleichheit" von L und K bedeutet. Wir müssen nämlich den Systemen L und K zusätzlich zu den unter A) berücksichtigten formalen Eigenschaften noch eine Beziehung zur Realität zuschreiben. Zur Unterscheidung von einer rein formalen Auffassung von L , K führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

(3.13) <u>Die realen Systeme ^rL , ^rK</u>

a) Ein r e a l e s Sprachsystem ^rL sei ein Sprachsystem L gemäß (1.2) sowie eine Vorschrift V, durch die festgelegt ist, bei welcher Beschaffenheit der Realität die Sätze "$P_j a_i$" wahr sind. Diese Festlegung soll dabei so erfolgen, daß die Voraussetzungen von (1.2d) erfüllt sind, also "P_1",...,"P_k" auf Grund dieser Festlegung eine vollständige logische Disjunktion bilden.

b) Eine r e a l e Versuchskette ^rK sei eine Kette K von (realen) Versuchsvorschriften gemäß (2.2) (genaueres zum Begriff der Versuchsvorschrift siehe [R] II §5); außerdem sei durch ^rK unter den möglichen Realisierungen von K eine einzige ausgewählt.

Erläuterung: Nach dem von Richter in [R] II §5 entwickelten Begriff der Versuchsvorschrift ist es möglich, daß eine Versuchsvorschrift mehrere Realisierungen gestattet; etwa an verschiedenen Orten oder zu verschiedenen Zeiten. So ist eine eindeutige Festlegung der Realisierung von K etwa dadurch möglich, daß wir Ort und Zeit für die Realisierung der Vorschriften H^i genau festlegen.

(3.14) <u>Der Begriff der Äquivalenz der Systeme ^rL , ^rK</u>

Den Begriff einer "inhaltlichen Gleichheit" von ^rL , ^rK präzisieren wir wie folgt:

Die realen Systeme ${}^{r}L$, ${}^{r}K$ heißen äquivalent, wenn es einen injektiven σ-Homomorphismus f von L in $\mathfrak{R}$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\mathfrak{R} = {}^{B}f(L)$

b) h ist wahr in ${}^{r}L$ $\Leftrightarrow$ $f(h)$ ist in ${}^{r}K$ eingetreten.

(Da f ein injektiver σ-Homomorphismus ist, genügt es die Forderung b) für die Atomsätze "$P_j a_i$" zu erheben)

(3.15) <u>Beschränkung auf eine spezielle Form der Äquivalenz</u>

Wir wollen im weiteren nur Äquivalenzen der folgenden Gestalt betrachten: Die Abbildung f von L in $\mathfrak{R}$ sei so beschaffen, daß den Ergebnissen $x_j^i | H^i$ der Versuchskette $K = \overrightarrow{(H^1, H^2, \ldots)}$ genau die Sätze "$P_j a_i$" entsprechen.

<u>Begründung</u>: Sind ${}^{r}L$, ${}^{r}K$ äquivalent (bei der Abbildung f), dann läßt sich K nach (3.11) formal als Koppelung $(K^1, K^2, \ldots)$ auffassen, sodaß den Ergebnissen von K^i auf Grund der Abbildung f genau die Sätze "$P_j a_i$" entsprechen.

Ist $N < \infty$, so läßt sich ${}^{r}K$ in ${}^{r}K'$ so abändern, daß zuerst die Ereignisse von $\mathfrak{R}^1$ dann von $\mathfrak{R}^2$ usw. beobachtet werden. Dann ist ${}^{r}K'$ ebenfalls äquivalent zu ${}^{r}L$ und es gilt: $K' = \overrightarrow{(K^1, K^2, \ldots)}$. Der Übergang von K zu K' bedeutet keine wesentliche Änderung von K. Die obige Einschränkung ist also im Fall $N < \infty$ ohne wesentlichen Verlust an Allgemeinheit möglich.

Ist $N = \infty$, so läßt sich die obige Überlegung zunächst nicht vornehmen. Es gibt nämlich σ-Homomorphismen von L_∞ in $\mathfrak{R}$, sodaß etwa $\mathfrak{R}^1$ zu keinem endlichen Abschnitt von K gehört. Eine sukzessive Beobachtung von $\mathfrak{R}^1, \mathfrak{R}^2$, usw. ist aber in diesem Fall nicht möglich. Wir werden jedoch diesen Fall im Hinblick auf die folgende Überlegung ausschließen: Das System L_∞ soll den Grenzfall der endlichen Systeme L_N darstellen. Wir wollen dementsprechend nur solche Äquivalenzen zwischen ${}^{r}L_\infty$ und ${}^{r}K$ betrachten, für die die Beschränkung der Abbildung f auf L_N zur Äquivalenz von ${}^{r}L_N$ und ${}^{r}f(L_N)$ +) führt. $f(L_N)$ muß also einer endlichen Versuchskette entsprechen. Dann gehört insbesondere $\mathfrak{R}^1, \ldots, \mathfrak{R}^N$ zu einem endlichen Abschnitt von K . Damit läßt sich dieselbe Überlegung wie für $N < \infty$ durchführen.

(3.16) <u>Die Existenz äquivalenter Systeme</u>

a) ${}^{r}K = {}^{r}\overrightarrow{(H^1, H^2, \ldots)}$ sei eine reale Versuchskette; jedes der H^i habe genau k Ergebnisse. Dann gibt es ein zu ${}^{r}K$ äquivalentes Sprachsystem ${}^{r}L$. Das formale System L läßt sich nämlich durch die folgende Defini-

+) Die Schreibweise "${}^{r}f(L_N)$" ist nicht ganz konsequent. Statt "$f(L_N)$" müßte hier ein Symbol für das zu dem Ereigniskörper $f(L_N)$ gehörende Experiment stehen.

tion zu einem zu ${}^{r}K$ äquivalenten realen Sprachsystem machen:
"$P_j a_i$" ist wahr in ${}^{r}L$: $\Leftrightarrow$ $x_j^i | H^i$ ist in ${}^{r}K$ eingetreten.

b) Die Frage, ob es zu jedem realen System ${}^{r}L$ eine zu ${}^{r}L$ äquivalente Versuchskette ${}^{r}K$ gibt, ist nicht so leicht zu entscheiden. Die Entscheidung hängt davon ab, wie weit man den Begriff der Vorschrift V in (3.13a) faßt. Es mag nämlich als real betrachtete Systeme ${}^{r}L$ geben, für die die folgende Definition zu keiner realen Versuchskette im Sinne Richters (siehe [R] II §5) führt:
$x_j^i | H^i$ ist in ${}^{r}K$ eingetreten : $\Leftrightarrow$ "$P_j a_i$" ist wahr in ${}^{r}L$.
Wir wollen die Möglichkeit solcher Sprachsysteme hier nicht diskutieren und uns auf den Fall beschränken, daß diese Definition zu einer realen Versuchskette führt, ohne zu untersuchen, wie stark diese Einschränkung ist.

(3.17) Die inhaltliche Gleichheit von Chance und B-funktion

Ist ${}^{r}L$ äquivalent zu ${}^{r}K$, so läßt sich nach (3.11) die B-funktion zu ${}^{r}L$ formal als Chance zu ${}^{r}K$ auffassen. Wir wollen nun zeigen, daß dies auch bei Berücksichtigung der inhaltlichen Bedeutung von Chance und B-funktion gilt. Und zwar berücksichtigen wir zwei Gesichtspunkte.

a) Sowohl Chance als auch Bestätigungsgrad haben den Sinn, auf eine Hypothese h (f(h)) bei Kenntnis des Datums e (f(e)) mit dem Maß c(h,e) (χ(f(h);φ.f(e))) zu bauen. Die Interpretation der Bestätigungsgrade zu ${}^{r}L$ als Chancen über ${}^{r}K$ führt also zu denselben praktischen Konsequenzen.

b) Nach (3.1b) haben Chance und B-funktion beide die Eigenschaft, ein Schätzwert für die objektive Wahrscheinlichkeit (W_2) zu sein.

Wir wollen diese Eigenschaften als hinreichend dafür ansehen, daß wir die B-funktion c_λ auch inhaltlich als Chance auffassen dürfen.
Die Tatsache, daß die B-funktion von Carnap bis auf einen Parameter λ eindeutig festgelegt ist, während die Chance von Richter noch von einer ganzen G-Bewertung φ abhängt, scheint keine inhaltliche Verschiedenheit der beiden Begriffe zu bedeuten, sondern eben die B-funktion c_λ als spezielle Chance aufzuweisen.

(3.18) Ergebnis

a) Die B-funktion c_λ zu einem Sprachsystem L läßt sich unter einer gewissen Einschränkung (siehe (3.16b)) als Chance zu einer Versuchskette K auffassen. Dabei läßt sich ohne wesentlichen Verlust an Allgemeinheit (siehe (3.15)) annehmen: $K = \overrightarrow{(H^1, H^2, \ldots)}$; die Ergebnisse von H^i entsprechen dabei genau den Sätzen "$P_j a_i$".

b) Das System von Carnap stellt einen Spezialfall des Systems von Richter dar. Wir werden uns im folgenden häufig nicht mehr auf das System von Carnap selbst sondern auf seine nach a) konstruierte Entsprechung im System von Richter beziehen. Insbesondere können wir das Axiomensystem NA1 -NA17 von (1.3) als Axiomensystem für die Chancen zu der in a) charakterisierten Versuchskette K formulieren. Die durch dieses Axiomensystem festgelegten Chancen sind dann genau die zu den B-funktionen c_λ gehörenden Chancen, entsprechend der in a) angegebenen Abbildung von L in $\mathfrak{K}$.

Wir nennen diese Chancen die Carnapschen Chancen und bezeichnen sie mit $\chi_\lambda(E)$ bzw. $\chi_\lambda(E,E')$.

(3.19) Die Carnapschen Chancen sind bis auf einen reellen Parameter eindeutig festgelegt. Die Chance von Richter hängt dagegen von einer ganzen G-Bewertung φ ab, die als Ausdruck einer Vorkenntnis über die jeweilige Versuchskette anzusehen ist.

Die G-Bewertungen, die zu den Carnapschen Chancen führen, drücken also die Voraussetzungen über die Versuchskette aus, unter denen die Carnapschen Chancen im System von Richter "adäquat" sind.

Nach der Intention des Systems von Carnap, wie in (1.1) ausgeführt, soll die "Adäquatheit" der Carnapschen Chancen keinerlei Voraussetzungen über die Versuchskette außer solchen über ihre logische Struktur erfordern. Demzufolge müßten alle zu den Carnapschen Chancen führenden G-Bewertungen ohne Gehalt sein, den Ausdruck vollständiger Unkenntnis über die Versuchskette bilden.

Wir werden in den folgenden Paragraphen auf diese Überlegung zurückkommen und sie dann genau ausführen.

§4. Die Notwendigkeit empirischer Voraussetzungen für die Adäquatheit der induktiven Logik von Carnap

(4.1) Die Intention des Systems von Carnap

Das in §1 skizzierte System der induktiven Logik von Carnap soll mit Hilfe der Funktion $c(h,e)$ eine präzise Beschreibung des induktiven Schließens innerhalb des einfachen Sprachsystems L geben.
Nach der Vorstellung von Carnap soll alles, was wir über die Natur wissen, durch induktive Schlüsse aus Beobachtungsdaten zustande gekommen sein.
Ein System, das das induktive Schließen formuliert, darf demnach keine Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Natur erfordern, da jede Aussage über die Beschaffenheit der Natur erst durch induktive Schlüsse aus Beobachtungen gewonnen werden soll, also nicht zur Rechtfertigung solcher Schlüsse verwandt werden kann.
Oder anders gesagt:
Ein System der induktiven Logik soll uns unvoreingenommen gegenüber der möglichen Beschaffenheit der Welt angeben, wie wahrscheinlich eine Hypothese im Hinblick auf eine gewisse Beobachtung ist.
Das System von Carnap ist als ein solches System intendiert. Es soll nur die in (1.2) skizzierte logische Struktur der Sprache L voraussetzen und keine Annahmen über die sonstige Beschaffenheit der Welt, dh. der Prädikate und Individuen einer betrachteten realen Sprache ${}^{r}L$ erfordern, auf die dieses System angewandt wird.
Die Carnapsche B-funktion soll also immer dann "a d ä q u a t" +) sein, wenn uns vor Beginn der Beobachtungen nur die logische Struktur von ${}^{r}L$ bekannt ist. Wir wollen dies an einem Beispiel verdeutlichen:

(4.2) Die Situation S

Ein Beobachter B befinde sich in der folgenden Situation S :
B wird mitgeteilt, daß sich an einem ihm unzugänglichen Ort eine Reihe von Individuen $a_1, a_2, \ldots$ befindet, die der vollständig disjunkten Eigenschaften $P_1, \ldots, P_k$ fähig sind. Außerdem wird B mitgeteilt, daß die Aussage e des entsprechenden Sprachsystems ${}^{r}L$ richtig ist.
B hat nun die Aufgabe für jede Hypothese h aus ${}^{r}L$ eine Wahrschein-

+) Wir gebrauchen hier das Wort "adäquat" in einem intuitiven, nicht genau umrissenen Sinne. Wir werden im folgenden auch einen genau präzisierten Begriff der Adäquatheit einführen. Um den intuitiven von dem präzisierten Begriff zu unterscheiden, werden wir im letzteren Fall stets formulieren: "Adäquat im Sinne der Definition ...". Um den intuitiven Gebrauch zu betonen, benutzen wir manchmal Anführungszeichen.

lichkeit im Hinblick auf die Prämisse e anzugeben. Nach der oben beschriebenen Intention des Systems von Carnap soll die durch die Axiome von (1.3) festgelegte B-funktion $c_\lambda(h,e)$ zu einer für diese Situation "adäquaten" Wahrscheinlichkeitsbewertung führen.

Wir werden zeigen, daß die Carnapsche B-funktion c_λ, entgegen der genannten Intention, in der Situation S nicht "adäquat" ist.

Zu diesem Zweck genügt es, einige notwendige Kriterien der Adäquatheit zu entwickeln, denen die Carnapsche B-funktion nicht genügt.

(4.3) Die Kriterien (F), (F′) der Adäquatheit

Wir werden zunächst zwei Kriterien der Adäquatheit entwickeln, die sich auf den Vergleich zweier Sprachsysteme stützen. Die Überlegung, die zu diesen Kriterien führt, entspricht einer von N. Goodman durchgeführten Untersuchung, die die Bedeutung "zeitabhängiger" Prädikate im Hinblick auf einen qualitativen Begriff der Bestätigung analysiert ([G], Seite 74ff).

a) Sei ${}^rL$ das in der Situation S gegebene reale Sprachsystem. $\pi_1,\ldots,\pi_N$ seien N beliebige Permutationen der Zahlen 1 bis k; jedoch seien für $N=\infty$ nur endlich viele der π_i von der Identität verschieden. Dann läßt sich ein reales Sprachsystem ${}^rL'$ wie folgt konstruieren:

${}^rL'$ beruhe auf einem formalen System der Gestalt (1.2) mit den gleichen Indiv. konst. wie ${}^rL$ und den Grundprädikaten "P'_1", ..., "P'_k". Dabei gelte: "$P'_j a_i$" ist wahr in ${}^rL'$ $\Leftrightarrow$ "$P_{\pi_i(j)} a_i$" ist wahr in ${}^rL$.

Ist e ein Satz von ${}^rL$, dann sei e' derjenige Satz von ${}^rL'$, der durch die Ersetzung von "$P_j a_i$" durch "$P'_{\pi'_i(j)} a_i$" aus e hervorgeht; π' bezeichnet dabei die Umkehrabbildung von π. Es gilt dann:

e wahr $\Leftrightarrow$ e' wahr.+)

Dem Satz e von ${}^rL$ entspricht also inhaltlich der Satz e' von ${}^rL'$ und umgekehrt. Wir können jeden Satz sowohl in ${}^rL$ als auch in ${}^rL'$ betrachten.

b) Wir behaupten: In der Situation S sind die Systeme ${}^rL$, ${}^rL'$ gleichberechtigt.

Es gilt nämlich völlig symmetrisch: "$P_j a_i$" wahr $\Leftrightarrow$ "$P'_{\pi'_i(j)} a_i$" wahr.

Sind also in der Situation S zwei Systeme ${}^rL$, ${}^rL'$ vorgelegt, die in dieser Beziehung zu einander stehen, so läßt sich nicht entscheiden, welches von beiden das "ursprüngliche" oder "richtige" ist. Wir können uns

---

+) Die Voraussetzung, daß für $N=\infty$ nur endlich viele Permutationen von der Identität verschieden sind, ist notwendig, damit jedem Satz e von ${}^rL_\infty$ ein Satz e' aus ${}^rL'_\infty$ entspricht. Würde man die Systeme L von (1.2) durch Zulassung beliebiger "abzählbarer Disjunktionen" erweitern, so wäre diese Voraussetzung nicht notwendig.

mit gleichem Recht bei der Bewertung einer Hypothese im Hinblick auf eine gegebene Prämisse auf ${}^{r}L$ oder ${}^{r}L'$ beziehen.(Seien etwa zwei Beobachter B , B' gegeben mit den Sprachsystemen ${}^{r}L$ bzw. ${}^{r}L'$,so müssen wir die Bewertungen der beiden Beobachter als gleichberechtigt ansehen.)

c) Wir müssen also fordern:

(F) Ist Q ein notwendiges Kriterium für die Adäquatheit in S einer B-funktion von ${}^{r}L$,so ist das analoge Kriterium $\tilde{Q}$ notwendig für die Adäquatheit in S einer B-funktion von ${}^{r}L'$; $\tilde{Q}$ entsteht dabei aus Q ,indem überall in Q die Prädikate "P_i" durch "P'_i" ersetzt werden.

Andererseit müssen wir auch verlangen:

(F′) Ist $c(h,e)$ eine für S adäquate B-funktion von ${}^{r}L$,so auch $c'(h',e')$ von ${}^{r}L'$ mit $c'(h',e') := c(h,e)$.

Denn eine adäquate Bewertung einer Hypothese im Hinblick auf eine Prämisse darf nicht inadäquat werden,wenn wir diese Hypothese und Prämisse in dem gleichberechtigten System ${}^{r}L'$ betrachten.

Wir müssen noch die in (F) vorausgesetzten Kriterien Q für die Adäquatheit einer B-funktion innerhalb eines gegebenen Sprachsystems ${}^{r}L$ formulieren.

(4.4) Kriterien der Adäquatheit innerhalb eines festen Systems ${}^{r}L$

Sei $c(h,e)$ eine Funktion,die für gewisse Sätze h , e aus ${}^{r}L$ definiert ist,sofern e nicht L-falsch.Dann sind für die Adäquatheit von c für die Situation S die folgenden Bedingungen notwendig:

a) Die Grundaxiome NA1 bis NA5 .

b) Das Axiom NA7 (Invarianz bei Permutation der Individuenkonstanten).

Begründung:Da nur die logische Struktur (1.2) von ${}^{r}L$ in S bekannt ist,ist keines der Individuen vor den anderen ausgezeichnet. Die Funktion c muß also invariant sein bei Permutation der Individuenkonstanten.Beispiel: $c(P_1a_2,P_1a_1) = c(P_1a_2,P_1a_3)$.

c) Das Axiom NA10 (Unabhängigkeit von N bei nicht generellen Sätzen).

Begründung: $c(h,e)$ soll nur von der Bedeutung der Sätze h , e abhängen; $c(h,e)$ soll nicht davon abhängen,über wieviele Individuen wir in L sprechen können,sofern auf diese Individuen nicht durch Quantifizierung in h , e Bezug genommen wird.

Nach der Überlegung von (A.1b) (Anhang zu §1) dürfen wir auf Grund dieses Axioms stets das System L_∞ zu Grunde legen.

d) Über den Definitionsbereich von $c(h,e)$ machen wir die folgenden Voraussetzungen:

Ist $c(h_o,e_o)$ definiert,so auch $c(h,e_o)$ für jeden nicht generellen Satz h von L_∞;ist $c(e,e_o) \neq 0$,so ist weiterhin durch den Multiplikationssatz auch $c(h,e_o.e)$ definiert.

(Diese Voraussetzungen lassen sich damit begründen, daß es möglich sein soll, jede B-funktion als Chance aufzufassen; siehe (5.5b).)

Geht $\overline{h}$, $\overline{e}$ durch Permutation der Individuenkonstanten aus h , e hervor, so ist mit $c(h,e)$ gemäß NA7 auch $c(\overline{h},\overline{e})$ definiert.

(4.5) Die Inadäquatheit der Carnapschen B-funktion c_λ (Fassung I)

Die Carnapsche B-funktion c_λ ist auf Grund der Kriterien (4.3), (4.4b) (Symmetrie bezüglich der Individuenkonstanten) nicht adäquat für die Situation S .

Beweisidee: Zu einer Carnapschen B-funktion c von ^rL existiert ein System $^rL'$ gemäß (4.3a), sodaß c' mit dem Kriterium (4.4b), das nach (F) auch in $^rL'$ gilt, im Widerspruch steht. c in ^rL kann also nicht adäquat sein, da sonst nach (F') auch c' in $^rL'$ adäquat sein müßte.

Beweis

a) Sei c eine Carnapsche B-funktion zu ^rL ; dann gilt:

$$c(P_1a_2,P_2a_1) < c(P_1a_2,P_1a_3) .$$

Der Beweis ergibt sich aus Axiom NA14 und Formel (1.6).

b) Sei π_i die Identität für $i \neq 1$, $\pi_1 : (1,2,3,\ldots,k) \rightarrow (2,1,3,\ldots,k)$.

Dann gilt in $^rL'$ wegen a): $c'(P'_1a_2,P'_1a_1) < c'(P'_1a_2,P'_1a_3)$; dies steht im Widerspruch zu NA7 .

(4.6) Die Inadäquatheit der Carnapschen B-funktion c_λ (Fassung II)

a) Um zu einer Ablehnung der B-funktion c_λ für die Situation S zu gelangen, können wir anstelle von (4.4b) auch die folgende Annahme gebrauchen:

(A) Sind c , $\overline{c}$ adäquat, so muß gelten:

$c(h,e) < c(h^+,e^+) \not\&\ \overline{c}(h,e) < \overline{c}(h^+,e^+)$; h,e,h^+,e^+ sind beliebige Sätze aus L .

Zwei adäquate B-funktionen sollen also nicht, anschaulich gesprochen, im "Widerspruch" zu einander stehen.

b) Auf Grund von (A) und der Kriterien (F) , (F') von (4.3) ist c_λ nicht adäquat für S .

Wegen (A) kann nämlich eine Carnapsche B-funktion c von ^rL nur dann für S adäquat sein, wenn jede adäquate B-funktion von ^rL das Axiom NA12 erfüllt. Dies führt zum Widerspruch mit (F) , (F'); denn NA12 ist nicht invariant beim Übergang von c zu c'.

(Ausführlich: Wäre eine Carnapsche B-funktion c von ^rL adäquat, so müßten alle adäquaten B-funktionen von ${}^{r}L$ das Axiom NA12 erfüllen. Also müßten nach (F) auch in ${}^{r}L'$ alle adäquaten B-funktionen NA12 erfüllen. Es gibt jedoch Systeme ${}^{r}L'$, sodaß das zu c gehörende c' das Axiom NA12 verletzt; c' wäre also nicht adäquat im Widerspruch zu (F').)

(4.7) Die für S adäquate B-funktion c_{∞}

Die im folgenden definierte Funktion c_{∞} stellt die einzige B-funktion dar, die den Adäquatheitskriterien (4.3), (4.4) gehorcht. Genauer gesagt: c_{∞} erfüllt (4.3), (4.4) und jede B-funktion, die diese Kriterien auch erfüllt, stimmt auf ihrem Definitionsbereich mit c_{∞} überein.+)

c_{∞} beruht (vergleiche (1.4)) auf einer A-priori-Bewertung $m_{\infty}(h)$; m_{∞} stellt dabei die Gleichverteilung auf den Zustandsbeschreibungen dar, dh. für jede Zustandsbeschreibung z von L_N gilt: $m_{\infty}(z) = 1/k^N$.

Beweis

a) c_{∞} erfüllt die Kriterien (4.4); Beweis siehe [C], Seite 220f.

b) c_{∞} erfüllt die Bedingungen (F), (F') von (4.3).

Sei nämlich $z = "P_{i_1}a_1 \ldots P_{i_N}a_N"$ eine beliebige Zustandsbeschreibung von L_N, so ist $z' = "P_{\Pi_1'(i_1)}a_1 \ldots P_{\Pi_N'(i_N)}a_N"$ eine beliebige Zustandsbeschreibung von L_N'. Es gilt: $c_{\infty}'(h', e') = m_{\infty}'(h' . e')/m_{\infty}'(e')$ mit $m_{\infty}'(z') = 1/k^N$. c' hat also ebenfalls die Gleichverteilung über den Zustandsbeschreibungen als A-priori-Bewertung; also erfüllt c' nach a) ebenfalls die Kriterien von (4.4).

c) Sei $c(h,e)$ eine B-funktion, die (4.3), (4.4) erfüllt. e_o, h_o seien zwei nicht generelle Sätze von L_{∞}, sodaß $c(h_o, e_o)$ definiert ist. Dann gilt: $c(h_o, e_o) = c_{\infty}(h_o, e_o)$.

Beweis

1) Nach (4.4d) ist $c(h, e_o)$ definiert für alle Sätze h von L_{∞}. Sei $z := P_{i_1}b_1 \ldots P_{i_N}b_N$ eine Zustandsbeschreibung bezüglich der Individuenkonstanten $b_1, \ldots, b_N$, die alle nicht in e_o vorkommen mögen. Dann gilt: $c(z, e_o) = 1/k^N$.

Beweis: Sei $\tilde{z} := P_{j_1}b_1 \ldots P_{j_N}b_N$ eine von z verschiedene Zustandsbeschreibung. Wäre nun $c(z, e_o) \neq c(\tilde{z}, e_o)$, so auch $c(z, e_o) \neq c(\bar{z}, e_o)$ mit $\bar{z} := P_{j_1}d_1 \ldots P_{j_N}d_N$; dabei mögen die Individuenkonstanten $d_1, \ldots, d_N$ nicht in e_o vorkommen und von $b_1, \ldots, b_N$ verschieden sein.

+) Wir beschränken uns hier bei dem Definitionsbereich einer B-funktion von vornherein auf die nichtgenerellen Sätze von L_{∞}. Der B-grad genereller Sätze von L_{∞} hat nur eine Bedeutung als mathematische Idealisierung, als Grenzfall des B-grads nicht genereller Sätze. Die Beschaffenheit einer B-funktion für die generellen Sätze von L_{∞} ist also in diesem Zusammenhang nicht von Interesse.

$^rL'$ sei ein Sprachsystem gemäß (4.3a) mit den folgenden Eigenschaften:
$P_{i_1}b_1, \ldots, P_{i_N}b_N$ wahr in ^rL $\Leftrightarrow$ $P'_{i_1}b_1, \ldots, P'_{i_N}b_N$ wahr in $^rL'$;
$P_{j_1}d_1, \ldots, P_{j_N}d_N$ wahr in ^rL $\Leftrightarrow$ $P'_{i_1}d_1, \ldots, P'_{i_N}d_N$ wahr in $^rL'$.
Es müßte also gelten: $c'(z', e'_o) \neq c'(\bar{z}', e'_o)$;dies stünde jedoch im Widerspruch zu NA7.(Nach (4.3),(4.4) muß NA7 auch für c' gelten.)
Also haben alle Zustandsbeschreibungen bezüglich $b_1, \ldots, b_N$ denselben B-grad auf Grund von e_o .

2) Für jeden nicht generellen Satz h ,der keine in e_o vorkommenden Individuenkonstanten enthält,gilt: $c(h,e_o) = c_\infty(h,e_o)$.

h läßt sich nämlich als Disjunktion von Zustandsbeschreibungen bezüglich gewisser Individuenkonstanten $b_1, \ldots, b_N$ darstellen,die alle nicht in e_o vorkommen.Nach 1) und (4.8b) gilt für eine solche Zustandsbeschreibung z : $c(z,e_o) = 1/k^N = m_\infty(z) = c_\infty(z,e_o)$.

3) Sei h ein beliebiger nicht genereller Satz von L_∞ ; $\bar{e}_o$ gehe durch Permutation der Individuenkonstanten aus e_o hervor,sodaß keine der Individuenkonstanten von e_o , h in $\bar{e}_o$ vorkommen. Dann gilt:

$c(\bar{e}_o.h,e_o) + c(\neg\bar{e}_o\,.\,h,e_o) = c(h,e_o)$.

$c(h,\bar{e}_o)$ ist definiert nach (4.4d). $c(\bar{e}_o,e_o) \overset{2)}{=} c_\infty(\bar{e}_o,e_o) \neq 0$;also ist nach (4.4d) auch $c(h,e_o.\bar{e}_o)$ definiert.Also gilt:

$c(\bar{e}_o.h,e_o) = c(\bar{e}_o,e_o)c(h,e_o.\bar{e}_o) = c(\bar{e}_o,e_o)c(h.e_o,\bar{e}_o)/c(e_o,\bar{e}_o)$
$= c_\infty(\bar{e}_o,e_o)c_\infty(h.e_o,\bar{e}_o)/c_\infty(e_o,\bar{e}_o) = c_\infty(\bar{e}_o.h,e_o)$ (nach 2)) .

O.E. sei $c(h,e_o) \neq 0$ (sonst gehe man über zu $\neg h$);dann ist nach (4.4d) $c(\tilde{h},h.e_o)$ definiert,also:

$c(\neg\bar{e}_o\,.\,h,e_o) = c(\neg\bar{e}_o,h.e_o)c(h,e_o) \overset{2)}{=} c_\infty(\neg\bar{e}_o,h.e_o)c(h,e_o)$.
Also: $c(h,e_o) = c_\infty(\bar{e}_o.h,e_o) + c_\infty(\neg\bar{e}_o,h.e_o)c(h,e_o)$.
Also: $c(h,e_o) = c_\infty(\bar{e}_o.h,e_o)/c_\infty(\bar{e}_o,h.e_o) = c_\infty(h,e_o)$.

(4.8) <u>Die Unmöglichkeit der Induktion auf Grund von c_∞</u>

a) Die nach (4.7) allein adäquate B-funktion c_∞ ergibt sich als Grenzfall der Carnapschen B-funktionen für den Wert $\lambda = \infty$ in der Parametrisierung von (1.5).(Beweis: [C],Seite 220f)
Nach (1.6) gilt also $c_\infty(P_1a,e) = 1/k$,wenn e eine Stichprobe von Individuen beschreibt,in der das durch a bezeichnete Individuum nicht vorkommt.Allgemeiner gilt:

b) Sei e eine Prämisse,die nur die Individuen $a_1, \ldots, a_n$ und h eine Hypothese,die nur die Individuen $a_{n+1}, \ldots, a_N$ erwähnt.
Dann ist: $c_\infty(h,e) = c_\infty(h,t) = m_\infty(h)$.

<u>Beweis</u>: e läßt sich als Disjunktion von Zustandsbeschreibungen z_i be-

züglich der Individuen $a_1,\dots,a_n$ darstellen, also: $e = \bigvee_i z_i$; analog gilt für h : $h = \bigvee_j \bar{z}_j$, dabei ist $\bar{z}_j$ eine Zustandsbeschreibung bezüglich der Individuen $a_{n+1},\dots,a_N$; $z_i\cdot\bar{z}_j$ ist eine Zustandsbeschreibung bezüglich der Individuen $a_1,\dots,a_N$. Also gilt: $m_\infty(z_i\cdot\bar{z}_j) = 1/k^N = 1/k^n\cdot 1/k^{N-n} = m_\infty(z_i)\cdot m_\infty(\bar{z}_j)$. Daraus folgt: $m_\infty(h.e) = m_\infty(\bigvee_i z_i\cdot\bigvee_j \bar{z}_j)$
$= m_\infty(\bigvee_{i,j} z_i\cdot\bar{z}_j) = \sum_{i,j} m_\infty(z_i\cdot\bar{z}_j) = \sum_{i,j} m_\infty(z_i)\cdot m_\infty(\bar{z}_j)$
$= \sum_i m_\infty(z_i)\cdot\sum_j m_\infty(\bar{z}_j) = m_\infty(\bigvee_i z_i)\cdot m_\infty(\bigvee_j \bar{z}_j) = m_\infty(h)\cdot m_\infty(e)$.

Also gilt: $c_\infty(h,e) = m_\infty(h.e)/m_\infty(e) = m_\infty(h)$.

c) Auf Grund der Funktion c_∞ wird die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese nicht beeinflußt durch die Beobachtung von Individuen, die nicht in der Hypothese vorkommen. Besagt die Hypothese etwa, daß ein bestimmter Rabe schwarz sei, so läßt uns die Funktion c_∞ nicht verstehen, warum wir annehmen, daß diese Hypothese in hohem Maß gesichert ist, wenn alle bislang beobachteten Raben schwarz waren.

Der Versuch Carnaps, das induktive Schließen innerhalb des einfachen Systems L allein mit Hilfe des Begriffs W_1 zu begründen, ist damit als gescheitert zu betrachten.

(4.9) Wir wollen einen Einwand gegen das System von Carnap diskutieren, der sich gegen das Indifferenzprinzip innerhalb dieses Systems richtet, nämlich gegen das Axiom NA8.

Sei ${}^rL$ eine reale Sprache gemäß (1.2), (3.13) mit den Prädikaten "P_1", ..., "P_k", ebenso ${}^rL^+$ mit "P_1^+", ..., "P_{k+1}^+"; dabei gelte:
$P_i a$ wahr in ${}^rL$ $\Leftrightarrow$ $P_i^+ a$ wahr in ${}^rL^+$, sofern $i < k$;
$P_k a$ wahr in ${}^rL$ $\Leftrightarrow$ $P_{k+1}^+ \vee P_k^+ a$ wahr in ${}^rL^+$.
Dann führt Axiom NA8 zu verschiedenen Bestätigungsgraden bei inhaltlich gleichen Sätzen, je nachdem, ob wir diese Sätze in ${}^rL$ oder in ${}^rL^+$ betrachten. So gilt etwa in ${}^rL$: $m(P_k a) = 1/k$, in ${}^rL^+$ dagegen: $m(P_{k+1}^+ \vee P_k^+ a) = 2/(k+1)$.

Wir wollen zunächst feststellen, daß diese Überlegung nichts gegen die Adäquatheit von NA8 für die Situation S besagt; denn die Zahl der Grundprädikate ist uns in dieser Situation vorgegeben und somit das System ${}^rL$ vor dem System ${}^rL^+$ ausgezeichnet.

Die in der Situation S gemachte Annahme, daß die Zahl der unterscheidbaren Eigenschaften des jeweiligen Individuenbereichs objektiv vorgegeben ist, stellt eine Idealisierung realer Verhältnisse dar, die wir jedoch in diesem Rahmen als sinnvolle Arbeitshypothese betrachten.

(4.10) Unsere Überlegungen ergaben eine Ablehnung von c_λ für die Situation S. Es erhebt sich nun die Frage, ob es Situationen S^+ gibt, für die eine B-funktion c_λ adäquat ist.

Um diese Frage zu erläutern, wollen wir die in (4.6) mit Hilfe der Kriterien (A), (F), (F′) vorgenommene Ablehnung von c_λ für S etwas analysieren. Wir können die Kritik von (4.6) nämlich auch wie folgt abfassen:

Wir gehen von der Annahme aus, daß es ein System ${}^rL$ gibt, sodaß in ${}^rL$ eine B-funktion c_λ "adäquat" ist. Dann folgt aus den Kriterien (A), (F′), daß es ein System ${}^rL'$ gibt, sodaß in ${}^rL'$ jede Carnapsche B-funktion inadäquat ist.

Anstelle der Forderung (F) benutzen wir nun die folgende Überlegung: Da wir in der Situation S nicht wissen, ob wir uns in dem "richtigen" System ${}^rL$ oder in dem "falschen" ${}^rL'$ befinden, können wir in S nicht entscheiden, ob es eine Carnapsche B-funktion gibt, die in dem vorgelegten System ${}^rL$ adäquat ist.

Diese Formulierung unserer Kritik des Carnapschen Systems legt die folgenden Fragen nahe:

a) Gibt es Systeme ${}^rL$, für die eine B-funktion c_λ adäquat ist?

b) Wie lassen sich diese Systeme charakterisieren?

c) Durch welche zusätzlichen Informationen müssen wir die Situation S abändern, damit der Beobachter B weiß, daß c_λ in ${}^rL$ adäquat ist?

(4.11) <u>Bedingungen für die Adäquatheit von c_λ im System von Richter</u>

a) Wir können eine Aussage über die Voraussetzungen für die Adäquatheit der Carnapschen Theorie gewinnen, indem wir die Carnapsche B-funktion gemäß (3.18) als Chance im Sinne des Systems von Richter auffassen.

Die Annahme der Carnapschen Chancen als adäquat bedeutet aus der Sicht des Systems von Richter die Annahme einer G-Bewertung, die zu diesen Chancen führt.

Nach der Intention des Systems von Richter bedeutet eine G-Bewertung φ auf dem Hypothesenbereich $\mathfrak{R}$ eine Stellungnahme zur Realität, eine Bewertung der verschiedenen denkbaren Möglichkeiten der Natur als mehr oder weniger glaubwürdig.

Die G-Bewertungen, die zu den Carnapschen Chancen führen, sagen uns bei welchem Glauben an die möglichen Beschaffenheiten der Natur die Carnapschen Chancen adäquat sind.

Oder anders gesagt:

Diese G-Bewertungen formulieren die

A n n a h m e n ü b e r d i e N a t u r , d i e V o r e i n g e n o m m e n h e i t , d i e w i r g e g e n ü b e r d e r R e a l i t ä t h a b e n m ü s s e n , d a m i t w i r d i e C a r n a p s c h e n C h a n c e n a l s a d ä q u a t a k z e p t i e r e n k ö n n e n .

b) Wie wir in §6 sehen werden, lassen sich die Carnapschen Chancen insbesondere unter der Voraussetzung gewinnen, daß die dem System ${}^{r}L$ zugeordnete Versuchskette ${}^{r}K$ die unabhängige Wiederholung eines Experimentes H darstellt.

Teilen wir also dem Beobachter B zusätzlich zu denen in der Situation S gegebenen Informationen mit, daß die Versuchskette ${}^{r}K$ die obige Eigenschaft hat, so wird er die Carnapschen Chancen als adäquat akzeptieren können.

(4.12) <u>Die Inadäquatheit der Carnapschen B-funktion c_λ (Fassung III)</u>

Akzeptieren wir das folgende Prinzip (P), so ergibt sich ein weiterer Einwand gegen die Adäquatheit der Carnapschen Chancen für die Situation S :

(P) Führen zwei G-Bewertungen zu denselben Chancen, so gibt es keine Möglichkeit zu entscheiden, welche der beiden G-Bewertungen die "richtigere" ist, welche besser im Einklang mit der Realität steht. Eine G-Bewertung stellt nur eine mögliche Interpretation der entsprechenden Chancen dar, die die eigentliche "Realität" ausmachen.

Zur Begründung dieses Prinzips können wir anführen, daß zwei G-Bewertungen mit dieser Eigenschaft zu denselben praktischen Konsequenzen führen, dieselbe Haltung bezüglich der Realität bedeuten.

Wären die Carnapschen Chancen adäquat für die Situation S, so ließe sich nach (P) und (6.4b) in dieser Situation stets annehmen, daß es sich bei der Versuchskette ${}^{r}K$ um die unabhängige Wiederholung eines Experimentes H handelt. Dies steht in krassem Widerspruch zu der Vorstellung, die wir mit dem Begriff der unabhängigen Wiederholung eines Experimentes verbinden. Nach dieser Vorstellung bedarf es nämlich gewisser Kenntnisse über die Versuchskette ${}^{r}K$ um zu entscheiden, ob es sich bei ${}^{r}K$ um die unabhängige Wiederholung eines Experimentes handelt; es ist nicht möglich, bei einer beliebigen Versuchskette, von der wir nichts wissen, diese Annahme zu machen.

(4.13) Ergebnis

a) Die Carnapsche B-funktion c_λ ist für die Situation S nicht adäquat; damit sie adäquat ist, sind zusätzliche Voraussetzungen über das betreffende Sprachsystem ^rL nötig.

Diese Voraussetzungen lassen sich in dem System von Richter durch die zu den Carnapschen Chancen gehörenden G-Bewertungen formulieren. Eine G-Bewertung bedeutet gewisse Annahmen über die reale Welt, genauer ausgedrückt, eine gewisse Bewertung der möglichen Beschaffenheiten der realen Welt.

Ein Beispiel bietet die Annahme, daß die zu ^rL gehörende Versuchskette die unabhängige Wiederholung eines festen Experimentes darstellt.

b) Die Annahme, daß eine Folge von Experimenten die unabhängige Wiederholung eines festen Experimentes darstellt, ist sehr häufig eine Voraussetzung statistischer Überlegungen. Mit dem in der Statistik für diese und ähnliche Voraussetzungen üblichen Begriff der A-priori-Hypothese läßt sich unsere Kritik der Carnapschen Theorie auch so aussprechen:

D a s S y s t e m v o n C a r n a p i s t n u r d a n n a d ä q u a t , w e n n w i r g e w i s s e A - p r i o r i - H y p o t h e s e n ü b e r d i e d e r S p r a c h e ^rL z u g e o r d n e t e V e r s u c h s k e t t e a n n e h m e n .

c) Es frägt sich nun, auf Grund welcher Beobachtungen und Überlegungen wir bei einem konkret vorliegenden Sprachsystem entscheiden können, ob die Carnapschen Chancen adäquat sind, dh. wie wir erkennen können, ob wir eine entsprechende A-priori-Hypothese, eine entsprechende G-Bewertung akzeptieren dürfen.

Wir werden diese Frage im nächsten Paragraphen behandeln, wo wir ganz allgemein die Rechtfertigung einer statistischen A-priori-Hypothese, bzw. die Herkunft einer G-Bewertung diskutieren wollen.

(4.14) Die Theorie des "entrenchment" von Goodman

a) Wir wollen auf den Zusammenhang unserer Ergebnisse mit den Überlegungen von Goodman hinweisen ([G], Seite 74ff). Aus den Überlegungen von Goodman ergibt sich, daß das Axiomensystem (1.3) von Carnap nur für solche Sprachsysteme adäquat ist, deren Prädikate "P_i" "entrenched" sind; ein Prädikat heißt dabei "entrenched", wenn es gut im Sprachgebrauch "verankert" ist und dies wiederum bedeutet, daß dieses Prädikat schon seit langem in unserer Sprache zu finden ist.

Wir können also feststellen:

Ein System von Prädikaten ist nur dann "entrenched", wenn wir bezüglich der zugeordneten Versuchskette ^rK eine A-priori-

Hypothese bzw. eine G-Bewertung annehmen können, die zu den Carnapschen Chancen führt. (Vergleiche Seite 54, 55)

b) Akzeptieren wir das Prinzip (P) von (4.12), so müßte es bei gut verankerten Prädikaten stets möglich sein, die zugeordnete Versuchskette ^{r}K als unabhängige Wiederholung eines festen Experimentes anzusehen. Diese Folgerung widerspricht der Vorstellung, die wir uns vom Begriff der unabhängigen Wiederholung eines Experimentes machen. Die Tatsache, daß wir eine Versuchskette mit Hilfe gut verankerter Prädikate beschreiben können, besagt nichts darüber, daß diese Versuchskette die unabhängige Wiederholung eines Experimentes darstellt.
Unsere Ergebnisse lassen also die Theorie von Goodman als problematisch erscheinen.

§5. Die Problematik einer a-priorischen G-Bewertung im System von Richter

(5.1) Die Begründung der Statistik von Richter

Das in §2 skizzierte System der Wahrscheinlichkeitstheorie von Richter ermöglicht einen Aufbau der mathematischen Statistik, der sich wie folgt charakterisieren läßt:
Wir besitzen in den praktischen Situationen der Statistik eine intuitive G-Bewertung über der Menge aller Verteilungsfunktionen der betreffenden Zufallsgröße. Durch diese intuitive G-Bewertung, kurz Vorbewertung genannt, wird jeweils eine Teilmenge von Verteilungsfunktionen als sehr unglaubwürdig ausgeschieden.
Mit Hilfe dieser Vorbewertung läßt sich also die in der Statistik vorgenommene Beschränkung auf eine Teilmenge allein zulässiger Verteilungsfunktionen, die jeweilige A-priori-Hypothese, und damit die ganze weitere Methodik der Statistik begründen; siehe etwa [R] Teil V, Satz 13 (Begründung des Konfidenzschlusses).
Für die statistische Praxis, in der solche Vorbewertungen einfach gegeben sind, ist diese Begründung ausreichend. Um den Aufbau der Statistik erkenntnistheoretisch abzuschließen, muß die Herkunft dieser Vorbewertung erklärt werden.

Diese Erklärung lautet ([R] Teil V, §20, Seite 311):

(E) "Die Aufstellung der G-Grade geschieht intuitiv durch überschlägige Anwendung von F [+] zur Änderung einer Gleichgewichtung, die einem mehr oder weniger gut vorstellbaren Zustande völligen Nichtwissens entspräche, unter Verwendung unserer gesamten, gerade im Bewußtsein befindlichen Erfahrung anstelle eines Versuchsergebnisses."

(5.2) Wäre (E) richtig, so wäre damit eine erkenntnistheoretisch vollständige Begründung der Statistik gelungen; insbesondere wäre durch (E) die in (4.13c) aufgeworfene Frage nach der Herkunft einer G-Bewertung geklärt, die zu den Carnapschen Chancen führt.

Wir wollen nun zeigen, daß sich die Erklärung (E) nicht aufrecht erhalten läßt:

Wollte man (E) beweisen, so müßte man zeigen, daß eine G-Bewertung φ_o existiert, die einem "völligen Nichtwissen" entspricht, dh. noch keine Voraussetzungen über die Natur macht, - unvoreingenommen ist gegenüber allen Möglichkeiten der Realität - , sodaß bei geeigneten Versuchsergebnissen φ_o durch sukzessive Verbesserung in eine Bewertung übergeht, die nahezu die ganze Glaubwürdigkeit auf eine der üblichen A-priori-Hypothesen der Statistik konzentriert.

(5.3) Die Situation S als Zustand des "völligen Nichtwissens"

Der Zustand "völligen Nichtwissens" läßt sich durch die Situation S von (4.2), übertragen auf die hier benutzte Sprache, illustrieren:

> Einem Beobachter B wird mitgeteilt, daß an einem ihm unzugänglichen Ort eine Kette von Experimenten H^i mit den Ergebnissen $x_1^i, \ldots, x_{k_i}^i$ abläuft. Nach jedem Versuch erfährt B das Ergebnis dieses Versuchs.

Wir wollen uns im folgenden auf den Fall $k_i = k$ beschränken.
Abstrakt läßt sich also diese Situation des "völligen Nichtwissens" dadurch charakterisieren, daß nur die Tatsache bekannt ist, daß jeder Versuch genau k Ergebnisse besitzt.

(5.4) Beispiel einer G-Bewertung, die dem Zustand S entspricht

Um die Problematik der Aussage (E) zu erkennen, wollen wir die folgende G-Bewertung φ_o betrachten, die sich unmittelbar als Ausdruck des völligen Nichtwissens anbietet:

a) Nach (2.8b) hat der Hypothesenbereich $\mathcal{P}$ die Darstellung ${}^{B}\sqcap\sqcap x\gamma i_1 \ldots i_s$.

+) F ist die Änderungsvorschrift $\varphi \longrightarrow \varphi^+$ gemäß (2.5).

$\varphi_o \big| {}^{B}\prod x \gamma^{i_1 \dots i_s}$ sei das Produktmaß der Gleichverteilungen auf den Simplizes $S^{i_1 \dots i_s}$. φ_o scheint eine "Gleichgewichtung" der gewünschten Art zu sein.

b) Wir müssen die Abänderung von φ_o in φ_o^+ untersuchen.
Es trete etwa x_1^1 auf; dann gilt: $d\varphi_o^+ = p_1 d\varphi_o$.
Für die Versuchskette $K;x_1^1$ mit dem Hypothesenbereich
$\mathfrak{P}' = {}^{B}\prod\limits_{s>0} x \gamma^{1 i_2 \dots i_s}$ ist dann gemäß (2.9) durch φ_o^+ eine Bewertung $\varphi_o' \big| \mathfrak{P}'$, die x_1^1-Projektion von φ_o^+ auf $\mathfrak{P}'$, festgelegt.
<u>Behauptung</u>: $\varphi_o' \big| {}^{B}\prod\limits_{s>0} x \gamma^{1 i_2 \dots i_s}$ stellt bis auf einen Faktor ebenfalls das Produktmaß der Gleichverteilungen auf $S^{1 i_2 \dots i_s}$ dar.

Beweis: Sei φ_1 die Gleichverteilung auf S, $\varphi_2 \big| {}^{B}\prod\limits_{s>0} x \gamma^{i_1 \dots i_s}$ das Produktmaß der Gleichverteilungen auf $S^{i_1 \dots i_s}$, $Z'(B)$ der Zylinder in ${}^{B}\prod\limits_{s>0} x \gamma^{i_1 \dots i_s}$ zur Basis B aus $\mathfrak{P}'$ und $Z(B)$ wie in (2.9). Dann gilt nach dem Satz von Fubini ($\varphi_o = \varphi_1 \times \varphi_2$):

$$\varphi_o'(B) = \varphi_o^+(Z(B)) = \int_{Z(B)} p_1 d\varphi_o = \int_{Z'(B)} \left(\int_S p_1 d\varphi_1 \right) d\varphi_2$$

$$= \alpha \cdot \int_{Z'(B)} d\varphi_2 = \alpha \cdot \varphi_2(Z'(B)) \text{ mit } \alpha := \int p_1 d\varphi_1 .$$

c) Nach Eintritt von x_1^1 besteht also für $K;x_1^1$ die analoge G-Bewertung wie zu Anfang für K. Beobachtungen führen somit nicht aus dieser Bewertung heraus.
Es wird sich zeigen, daß dies für jede G-Bewertung gilt, die dem Zustand des völligen Nichtwissens von (5.3) entspricht.

(5.5) <u>Die Chancen zu einer der Situation S entsprechenden G-Bewertung</u>

a) Da sich der Begriff einer Gleichverteilung auf $\mathfrak{P}$ nicht ohne weiteres definieren läßt, - die Gleichverteilung hängt von der Parameterdarstellung von $\mathfrak{P}$ ab -, wollen wir die obige Betrachtung nicht als endgültigen Beweis für die Ablehnung von (E) ansehen.
Ein strenger Beweis für die Ablehnung von (E) ergibt sich, wenn wir die Chancen zu einer G-Bewertung φ_o betrachten, die dem Zustand S entspricht.
Die Chancen zu einer solchen G-Bewertung müssen nämlich "adäquat" für die Situation S sein.
Die in §4 entwickelten Adäquatheitskriterien lassen sich gemäß dem in (3.18b) angegebenen Isomorphismus zwischen L und K in die hier benutzte Sprache übertragen. Das führt zu den folgenden Aussagen:

b) Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten Fall gibt es ein Ereignis E_o eines endlichen Abschnitts von K, sodaß gilt: $0 < \int E_o\langle p\rangle \, d\varphi_o < \infty$. Also existieren die Chancen $\chi(E;\varphi_o.E_o)$ und sind adäquat für die Situation S.

Auf Grund der Adäquatheitskriterien von §4 ergibt sich dann analog zu (4.7): $\chi(E;\varphi_o.E_o) = \chi_\infty(E.E_o)/\chi_\infty(E_o)$; dabei stellt $\chi_\infty|^B\prod^x \mathfrak{L}^i$ das Produktmaß der Gleichverteilungen auf $\mathfrak{L}^i$ dar.

c) Im zweiten Fall gilt für jedes Ereignis E eines endlichen Abschnitts von K: $\int E\langle p\rangle \, d\varphi_o = 0$ oder $\int E\langle p\rangle \, d\varphi_o = \infty$.

In diesem Fall existieren die Chancen $\chi(E';\varphi_o.E)$ für kein beobachtbares E.

Die Beschaffenheit von Chancen $\chi(E';\varphi_o.E)$, die nur für ein nicht beobachtbares E existieren, ist in diesem Zusammenhang nicht von Interesse.

d) Ergebnis: Die Chancen zu einer der Situation S entsprechenden G-Bewertung φ_o sind für alle Ereignisse aus $\prod^x \mathfrak{L}^i$, für die sie existieren, durch χ_∞, das Produktmaß der Gleichverteilungen über $\mathfrak{L}^i$ gegeben.

(5.6) Die Ablehnung der Erklärung (E)

a) Sei φ_o eine G-Bewertung auf $\mathfrak{P}$, die dem Zustand S des völligen Nichtwissens entspricht. Dann führt die Beobachtung eines Ereignisses $E_o = X^1_{i_1} \ldots X^n_{i_n}$ gemäß (2.10) zu einer Bewertung φ'_o auf dem Hypothesenbereich $\mathfrak{P}'$ der Versuchskette $K' = K;E_o$ +). Sei E ein Ereignis von K'; dann gilt nach (2.10): $\chi(E;\varphi'_o) = \chi(E;E_o.\varphi_o)$; dabei existiert die rechte Seite genau dann, wenn auch die linke existiert.

Existieren also diese Chancen, so gilt nach (5.5d):

$$\chi(E;\varphi'_o) = \chi(E;E_o.\varphi_o) = \chi_\infty(E.E_o)/\chi_\infty(E_o) = \chi_\infty(E) .$$

Die Chancen zu der Versuchskette K' bei der Bewertung φ'_o sind, sofern sie existieren, ebenfalls durch die Funktion χ_∞ gegeben.

b) Wir können damit die Erklärung (E) wie folgt zurückweisen: Nach dem Schema der Erklärung (E) gelangen wir immer nur zu G-Bewertungen, die entweder gar keine Chancen oder χ_∞ als Chancen haben. (E) läßt uns also nicht verstehen, wie wir zu einer A-priori-Hypothese bzw. zu einer G-Bewertung kommen, mit Chancen, die von χ_∞ verschieden sind.

+) (2.10) läßt sich auch für beliebige Ereignisse E aus $\mathfrak{R}$ formulieren ([R], V Seite 328f). Der Einfachheit halber haben wir uns auf Ereignisse E_o der obigen Gestalt beschränkt. Diese Beschränkung ist in diesem Zusammenhang aus erkenntnistheoretischen Gründen zulässig.

So ist es etwa auf Grund von (E) nicht verständlich, wie wir zu einer G-Bewertung gelangen können, die zu den Carnapschen Chancen führt. Insbesondere ist es nicht verständlich, wie wir zu dem Glauben gelangen können, daß eine bestimmte Versuchskette die unabhängige Wiederholung eines festen Experimentes darstellt.

c) Mit Hilfe des Prinzips (P) von (4.12) können wir unsere Ablehnung der Erklärung (E) auch wie folgt aussprechen:

Eine G-Bewertung, die dem Zustande völligen Nichtwissens entspricht, geht bei Abänderung auf Grund von Beobachtungen stets in eine Bewertung über, die ebenfalls dem Zustande völligen Nichtwissens entspricht.

Nach dem Prinzip (P) entspricht nämlich eine G-Bewertung φ_0 genau dann der Situation S, wenn die zu φ_0 gehörenden Chancen adäquat sind für S. Nach (5.5d) sind die Chancen zu einer G-Bewertung genau dann adäquat für S (dh. erfüllen die Adäquatheitskriterien von §4), wenn sie überall dort, wo sie existieren, durch χ_∞ gegeben sind. Nach (5.6a) folgt dann, daß auch die neue auf Grund einer Beobachtung aus φ_0 gewonnene Bewertung φ_0' für S adäquate Chancen hat.

(5.7) <u>Ergebnis</u>

a) Das System von Richter intendiert, den Prozeß der "empirischen Erkenntnis", das "Lernen" auf Grund von Erfahrungen zu formulieren. Unsere Untersuchung hat nun gezeigt, daß eine solche Erkenntnis auf Grund des Systems von Richter nur dann möglich ist, wenn wir bereits eine gewisse "Voreingenommenheit" gegenüber der Realität besitzen.
Die Rechtfertigung einer solchen Voreingenommenheit ist innerhalb des Systems von Richter nicht möglich; insbesondere ist es nicht möglich, eine Voreingenommenheit vor einer anderen auszuzeichnen.

Das System von Richter enthält eine erkenntnistheoretische Lücke, durch die das gesamte Gebäude der objektiven Wahrscheinlichkeitstheorie die Verbindung zur Realität verliert.

So ist es etwa nicht möglich, anzugeben auf Grund welcher Beobachtungen wir annehmen dürfen, daß eine Versuchskette die unabhängige Wiederholung eines festen Experimentes darstellt.

b) Das System von Richter liefert also keine Erklärung dafür, daß wir gewisse A-priori-Hypothesen bei vielen Situationen der Statistik als akzeptabel betrachten.

Andererseits hat die Annahme solcher A-priori-Hypothesen und die Verwendung des darin involvierten Begriffs der objektiven Wahrscheinlichkeit eine große intuitive Evidenz für sich. Man kann daher erwarten, daß es durch zusätzliche Betrachtungen innerhalb komplexerer Systeme möglich ist, die erkenntnistheoretische Lücke des Systems von Richter zu schließen.

Ein Ergebnis solcher Betrachtungen müßte es sein, eine bestimmte "Voreingenommenheit" für eine gegebene konkrete Versuchskette auszuzeichnen und zu rechtfertigen. Wir wollen jedoch bemerken, daß die Auszeichnung und Rechtfertigung einer solchen "Voreingenommenheit" immer nur im Hinblick auf Fakten geschehen könnte.

Wie sich nämlich aus den Überlegungen von §4 ergibt, geht es nicht, eine bestimmte Voreingenommenheit für die Situation S als "adäquat", als möglich anzunehmen; denn durch die Gleichberechtigung der Systeme ${}^{r}L$ und ${}^{r}L'$ in der Situation S führt die Auszeichnung einer bestimmten Voreingenommenheit zu Widersprüchen.

An die Stelle der Erklärung (E) können wir also das folgende heuristische Prinzip (E′) setzen:

(E′) Die Aufstellung einer G-Bewertung erfolgt durch Abänderung einer Vorbewertung auf Grund der gemachten Beobachtungen. Diese Vorbewertung selbst entstammt einem vorwissenschaftlichen, intuitiven Erkenntnisprozeß, den wir bis jetzt noch nicht erklären können. Ein Hinweis auf seine Existenz bildet die intuitive Sicherheit, mit der wir gewisse A-priori-Hypothesen bei vielen konkreten Situationen der Statistik als adäquat betrachten.

c) Die Theorie von Goodman

Ein interessanter Ansatz für das Problem, die Annahme einer statistischen A-priori-Hypothese zu rechtfertigen, bietet der in (4.14a) festgestellte Zusammenhang zwischen dem "entrenchment" von Prädikaten und der Adäquatheit einer statistischen A-priori-Hypothese.

§6. Die Voraussetzungen der Carnapschen Theorie in dem System von Richter (Die G-Bewertungen zu den Carnapschen Chancen)

(6.1) Die Bedeutung der Carnapschen Chancen für das induktive Schließen

Trotz der in §4 geäußerten Kritik der Carnapschen Theorie und der Ablehnung der Carnapschen Chancen für die Situation S sind die Carnapschen Chancen von großer Bedeutung.

Wir befinden uns nämlich sehr häufig in einer Situation, in der die von der Carnapschen Theorie in den Axiomen NA7, NA8 vorausgesetzte Symmetrie von Individuen und Prädikaten gegeben ist. Halten wir in einer solchen Situation überhaupt eine Induktion für möglich, dh. glauben wir an eine "Erkenntnis" auf Grund von Beobachtungen, so müssen wir das Axiom NA12b akzeptieren. Alle weiteren Axiome von Carnap sind in einer solchen Situation im allgemeinen+) als zwingend oder zumindest als evident zu bezeichnen

H a l t e n   w i r a l s o   b e i   v o r a u s g e s e t z t e r   S y m m e t r i e   v o n   P r ä d i k a t e n   u n d   I n d i v i d u e n   ü b e r h a u p t   e i n e   I n d u k t i o n   f ü r   m ö g l i c h ,   s o   s i n d   i m   a l l g e m e i n e n   d i e   C a r n a p s c h e n   C h a n c e n   a l s   a d ä q u a t e   W a h r s c h e i n l i c h k e i t s b e w e r t u n g   a n z u s e h e n .

Wir wollen einige Beispiele für solche Situationen angeben:

a) Wiederholter Wurf einer Münze mit den Ergebnissen "Kopf" und "Wappen"; in der Sprache von Carnap stellt also der i-te Wurf der Münze das Individuum a_i dar; die Prädikate P_1 , P_2 entsprechen den Ergebnissen "Kopf" und "Wappen".

b) Ziehen einer Kugel aus einer Urne und Feststellung ihrer Farbe.

c) Beobachtung von Vögeln einer Insel im Hinblick auf ihre Farbe.

(6.2) Die Bedeutung der Kenntnis von G-Bewertungen zu den Carnapschen Chancen

Wir wollen nun einige G-Bewertungen angeben, die zu den Carnapschen Chancen führen, bzw. einige A-priori-Hypothesen ausfindig machen, unter denen die Carnapschen Chancen "adäquat" sind. Dies hat den folgenden Zweck:

a) Zwar liefert uns nach §5 das System von Richter kein Mittel, um zu entscheiden, ob eine bestimmte A-priori-Hypothese adäquat ist, jedoch ist es uns in vielen Fällen möglich, diese Entscheidung intuitiv zu treffen. Kennen wir die A-priori-Hypothesen, die zu den Carnapschen Chancen führen, so ist es uns möglich, einen intuitiven Überblick über die Situationen zu erhalten, in denen die Carnapschen Chancen adäquat sind.

+) Es sind Informationen denkbar, sodaß das Irrelevanzprinzip NA14 nicht akzeptabel ist.

Da die Adäquatheit der Carnapschen Chancen bei akzeptierter Symmetrie von Individuen und Prädikaten nach (6.1) im allgemeinen gleichbedeutend damit ist, ob wir überhaupt eine Induktion in diesem Fall für möglich halten, können wir anhand der A-priori-Hypothesen, unter denen die Carnapschen Chancen adäquat sind, die Richtigkeit einer Theorie beurteilen, die ebenfalls Bedingungen für die Möglichkeit einer Induktion entwickelt.
Wie in (4.14) bemerkt, führt dieser Standpunkt zu starken Bedenken gegen die Theorie von Goodman.

b) Akzeptieren wir eine A-priori-Hypothese, unter der die Carnapschen Chancen adäquat sind, etwa die der unabhängigen Wiederholung, so ist es interessant zu wissen, welche spezielle G-Bewertung unter dieser A-priori-Hypothese durch die Carnapschen Axiome ausgezeichnet ist.

(6.3) Das mathematische Problem der G-Bewertungen zu den Carnapschen Chancen

Mathematisch gesehen stehen wir vor der Aufgabe, einen Überblick über die Gesamtheit aller G-Bewertungen $\varphi|\mathcal{P}$ zu erhalten mit der Eigenschaft: $\chi(E;\varphi.E') = \chi_\lambda(E,E')$; χ_λ bezeichnet dabei gemäß (3.18b) die Carnapschen Chancen.

Wegen des Axioms der Regularität, des Multiplikations- und des Additionssatzes reduziert sich diese Gleichung auf die folgende Bedingung:

$$\int X^1_{i_1}\dots X^N_{i_N}\langle p\rangle \, d\varphi \,/\, \varphi(P) = m_\lambda(z)$$; dabei bezeichnet z die Zustandsbeschreibung von L_N, die nach dem Isomorphismus von (3.11) zu $X^1_{i_1}\dots X^N_{i_N}$ gehört.

Wir wollen hier keine allgemeinen Betrachtungen über die Beschaffenheit dieser Lösungsgesamtheit anstellen, sondern uns darauf beschränken, gewisse spezielle Lösungen anzugeben, die aus den erwähnten Gründen von besonderem Interesse sind.

(6.4) Die A-priori-Hypothese der unabhängigen Wiederholung

Wir beweisen zunächst die bereits in §4 gemachte Behauptung, daß sich die Carnapschen Chancen unter der Voraussetzung gewinnen lassen, daß K die unabhängige Wiederholung eines festen Experimentes darstellt.

a) Die Voraussetzung, daß die Versuchskette K diese Eigenschaft hat, drückt sich darin aus, daß nur solche G-Bewertungen $\varphi|\mathcal{P}$ zugelassen sind, für die gilt: $\varphi(P - P') = 0$ mit
$P' := \left\{ \vec{p} : p_j^{i_1\dots i_s} = p_j \text{ für alle Zahlen } j, i_1, \dots, i_s \right\}$.
Wir können P' mit dem Simplex $S := \left\{ \varphi \in R^k : p_i \geq 0 , \sum p_i = 1 \right\}$ identifizieren; das $(k-1)$-dimensionale Simplex S des R^k wiederum

können wir in natürlicher Weise eineindeutig auf das Simplex T_k des R^{k-1} abbilden , $T_k := \{(p_1,\dots,p_{k-1}) \in R^k : \; p_i \geq 0 \; , \; \sum p_i \leq 1\}$.
Einem Maß $\varphi | \mathfrak{P}$ entspricht also unter der hier gemachten Voraussetzung eineindeutig ein Maß $\mu | \mathfrak{T}$;dabei bezeichnet $\mathfrak{T}$ die Klasse der Borelschen Mengen von T_k .
Liegt das Maß $p | \mathfrak{R}$ in P',so gilt: $p(X^1_{i_1}\dots X^N_{i_N}) = p_1^{N_1}\dots p_k^{N_k}$;dabei gibt N_i an,wie oft die Zahl i in der Reihe $i_1,\dots,i_N$ vorkommt.
Es gibt also unter der genannten Voraussetzung genau dann eine G-Bewertung $\varphi | \mathfrak{P}$ zu den Carnapschen Chancen,wenn es ein Maß $\mu | \mathfrak{T}$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\text{(G)} \qquad \int_{T_k} p_1^{N_1}\dots p_k^{N_k}\, d\mu / \mu(T_k) \;=\; m_\lambda(z) \;=\; \frac{\prod_{1\leq i\leq k} (N_i + \lambda/k - 1)^{[N_i]}}{(N + \lambda - 1)^{[N]}} \quad .$$

b) Satz:Unter der Voraussetzung,daß K in der unabhängigen Wiederholung eines festen Experimentes besteht,sind die G-Bewertungen zu den Carnapschen Chancen (bis auf einen Faktor) eindeutig bestimmt;sie sind gegeben durch das folgende Maß $\mu_\lambda | \mathfrak{T}$:

$$d\mu_\lambda = (p_1\dots p_k)^{\alpha} dp_1\dots dp_{k-1} \quad , \qquad \alpha := \lambda/k - 1 \; .$$

Beweis

1) Wir verifizieren zunächst die Gleichung (G) von a):

$$\text{I)} \quad \int_{T_k} p_1^{l_1}\dots p_k^{l_k}\; dp_1\dots dp_{k-1} = \frac{\prod_{i=1}^{k} l_i!}{(k - 1 + \sum_{i=1}^{k} l_i)!} \qquad , \; l_i \geq 0, \; k \geq 2 \; .$$

Wir beweisen I) durch Induktion nach k.Der Induktionsanfang $(k=2)$ ergibt sich mit Hilfe der Eulerschen Betafunktion $B(x,y)$:

$$\int_0^1 p_1^{l_1}(1 - p_1)^{l_2}\, dp_1 \;=\; B(l_1+1, l_2+1) \;=\; l_1!\, l_2!/(l_1+l_2+1)! \quad .$$

Induktionsannahme: I) sei richtig für k .Dann folgt:

$$\int_{T_{k+1}} p_1^{l_1}\dots p_{k+1}^{l_{k+1}}\; dp_1\dots dp_k = \int_0^1 p_1^{l_1}\Big(\int_{T_k(p_1)} p_2^{l_2}\dots p_{k+1}^{l_{k+1}}\; dp_2\dots dp_k\Big)dp_1$$

$$\Big(\text{mit } \; T_k(p_1) := \{(p_2,\dots,p_k) \in R^{k-1} : \; p_i \geq 0 \; , \; \sum_{i=2}^{k} p_i \leq 1-p_1\} \; \Big)$$

$$= \int_0^1 p_1^{l_1}(1-p_1)^{k-1+\sum_{i=2}^{k+1} l_i}\Big[\int_{T_k} p_2'^{\,l_2}\dots p_{k+1}'^{\,l_{k+1}}\; dp_2'\dots dp_k'\Big]dp_1 \qquad (p_i' := p_i/(1-p_1))$$

$$= \frac{\prod_{i=2}^{k+1} l_i!}{(k - 1 + \sum_{i=2}^{k+1} l_i\,)!} \cdot \int_0^1 p_1^{l_1}(1-p_1)^{k-1+\sum_{i=2}^{k+1} l_i}\; dp_1$$

Den zweiten Faktor in diesem Produkt können wir wieder mit Hilfe der Betafunktion berechnen, so daß sich der gewünschte Ausdruck ergibt.

II) Aus I) ergibt sich:

$$\frac{\int_{T_k} p_1^{N_1+\alpha} \cdots p_k^{N_k+\alpha} \, dp_1 \ldots dp_{k-1}}{\int_{T_k} (p_1 \ldots p_k)^{\alpha} \, dp_1 \ldots dp_{k-1}} = \frac{\left[\prod_{i=1}^{k} (N_i+\alpha)!\right] (k+k\alpha-1)!}{\left[\prod_{i=1}^{k} \alpha!\right] (k-1+k\alpha+\sum_{i=1}^{k} N_i)!}$$

$$= \prod (N_i+\alpha)^{[N_i]} / (N+k\alpha+k-1)^{[N]} = \prod (N_i + \lambda/k - 1)^{[N_i]} / (N + \lambda - 1)^{[N]}$$

Das war zu beweisen.

2) Die eindeutige Bestimmtheit des Maßes $\mu | \mathfrak{F}$ ergibt sich aus dem folgenden Satz ([R'] (6.46)):

Eine Verteilungsfunktion $F(y)$ ist durch ihre Momente

$$\mu'_{m_1,\ldots,m_n} := \int y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n} \, dF(y)$$

eindeutig bestimmt, sofern gilt: Die Summe

$$\sum \frac{\mu'_{m_1,\ldots,m_n}}{m_1! \ldots m_n!} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$$

konvergiert bei geeignetem $U > 0$ für alle $\mathfrak{z}$ mit der Eigenschaft $|z_i| < U$ für alle i.

Fordern wir also $\int d\mu_\lambda = 1$, so gilt $\int p_1^{N_1} \ldots p_{k-1}^{N_{k-1}} \, d\mu_\lambda = m_\lambda(z)$ für ein z mit $N_k = 0$. Alle Momente von μ_λ sind also beschränkt durch die Zahl 1; also konvergiert die obige Summe. D.w.z.b.

(6.5) Die A-priori-Hypothese des Urnenversuchs

Wir wollen zeigen, daß sich die Carnapschen Chancen unter der Voraussetzung gewinnen lassen, daß K einen Urnenversuch darstellt; genauer gesagt, wollen wir annehmen, daß das Experiment H^i der Versuchskette $K = \overrightarrow{(H^1,\ldots,H^N)}$ in dem i-ten Zug ohne Zurücklegen aus einer Urne mit N Elementen und k möglichen Merkmalen besteht.

Diese Voraussetzung bedeutet wieder, daß die ursprüngliche Menge P der möglichen Wahrscheinlichkeitsmaße auf eine Menge P' zusammenschrumpft. Die Menge P' entspricht dabei eineindeutig den möglichen Verteilungen der k Merkmale in der Urne. Eine G-Bewertung $\varphi | \mathfrak{F}$ ist also unter dieser Voraussetzung durch Werte $\varphi(N_1,\ldots,N_k)$, die Glaubwürdigkeit der einzelnen Verteilungen, gegeben.

Geben die Zahlen $N_1', \ldots, N_k'$ die Verteilung in der Urne an und ist $X_{i_1}^1 \ldots X_{i_N}^N$ ein Ereignis mit den Zahlen $N_1, \ldots, N_k$, so gilt:

$$p(X_{i_1}^1 \ldots X_{i_N}^N) = \begin{cases} N_1! \ldots N_k!/N! & \text{falls } N_i = N_i' \text{ für alle } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir dürfen annehmen, daß das Maß φ normiert ist; dieses Maß führt also genau dann zu den Carnapschen Chancen, wenn gilt:

$$\int p(X_{i_1}^1 \ldots X_{i_N}^N)\, d\varphi = \frac{N_1! \ldots N_k!}{N!} \cdot \varphi(N_1, \ldots, N_k) = \frac{\prod_{i=1}^{k} (N_i + \lambda/k - 1)^{[N_i]}}{(N + \lambda - 1)^{[N]}}$$

Damit haben wir das folgende Ergebnis:

Satz

Unter der Voraussetzung, daß K einen Urnenversuch der beschriebenen Art darstellt, ist die G-Bewertung zu den Carnapschen Chancen eindeutig festgelegt; sie ist durch die folgende Bewertung über den möglichen Verteilungen in der Urne gegeben:

$$\varphi_\lambda(N_1, \ldots, N_k) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \binom{N_i + \lambda/k - 1}{N_i}}{\binom{N + \lambda - 1}{N}}$$

(6.6) Hinreichende Bedingungen für die Aäquatheit der Carnapschen Chancen

a) Wir haben in (6.4), (6.5) zwei A-priori-Hypothesen kennengelernt, unter denen die Carnapschen Chancen zu gewinnen waren. Diese A-priori-Hypothesen allein führen jedoch noch nicht zu den Carnapschen Chancen; es gibt nämlich auch unter diesen Voraussetzungen G-Bewertungen, die nicht die Carnapschen Chancen liefern. Um bei diesen A-priori-Hypothesen zu den Carnapschen Chancen zu gelangen, sind noch eine Anzahl zusätzlicher Forderungen nötig.

b) Wir wollen zunächst den Fall (6.4) der Unabhängigkeit betrachten. Eine echte Forderung, die wir erheben müssen, stellt das Axiom NA8 (die Symmetrie der Grundprädikate) dar. Diese Forderung ist dann zu akzeptieren, wenn wir außer der A-priori-Hypothese nichts über die Versuchskette wissen. Alle anderen Carnapschen Axiome außer NA12b sind für diese Situation ebenfalls unmittelbar als evident zu erkennen.
Wir wollen nun zeigen, daß auch NA12b für diese Situation zu akzeptieren ist. Die einzige Funktion, die alle Carnapschen Axiome außer NA12b erfüllt, ist nämlich die Funktion c_∞. Die G-Bewertung zu c_∞ ist nach (6.4) so beschaffen, daß sie dem Wahrscheinlichkeitsvektor

$\wp_o := (1/k,\ldots,1/k)$ den Wert 1 und allen anderen den Wert 0 zumißt. Wenn uns nur die Richtigkeit der A-priori-Hypothese bekannt ist,ist diese G-Bewertung,die a-priori annimmt,daß in der Natur $\wp_o$ vorliegt, sicherlich nicht zu akzeptieren.NA12b muß also ebenfalls erfüllt sein. Mit Hilfe des Prinzips (P) von (4.12) können wir somit die folgende Aussage machen:

Satz

Sind die Carnapschen Chancen adäquat,so dürfen wir annehmen,daß die Versuchskette eine unabhängige Wiederholung darstellt.(Nach (6.4),(P))

Akzeptieren wir umgekehrt diese A-priori-Hypothese und wissen wir sonst nichts,so sind die Carnapschen Chancen adäquat.(Obige Überlegung)

c) Bei der A-priori-Hypothese des Urnenversuchs läßt sich ein analoges Ergebnis nicht so leicht gewinnen.Wir wollen deshalb auf dieses Beispiel hier nicht mehr genau eingehen.Wir wollen nur feststellen,daß bei großem N und kleinen Stichproben praktisch Unabhängigkeit vorliegt, also c_∞ nach b) nicht annehmbar ist.Ganz analog zu b) ergibt sich dann die Adäquatheit der Carnapschen Chancen bei bloßer Kenntnis der A-priori-Hypothese.

(6.7) Die Adäquatheit der Carnapschen Chancen unter möglichst schwachen Voraussetzungen über die Natur

a) Die G-Bewertungen von (6.4),(6.5) bedeuten jeweils eine sehr starke Voraussetzung über die Beschaffenheit der Natur.Durch diese G-Bewertungen wird nämlich eine ganze Mannigfaltigkeit von denkbaren Möglichkeiten der Natur in definitiver Weise ausgeschlossen;genauer gesagt wird durch diese Bewertungen die unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit der ursprünglich zugelassenen Möglichkeiten auf ein Gebilde der Dimension 1 bzw. 0 reduziert.

Es erhebt sich die Frage,ob sich die Carnapschen Chancen auch unter schwächeren Voraussetzungen gewinnen lassen.Die schwächste Voraussetzung,die in diesem Sinne möglich ist,besteht darin,daß wir keine Möglichkeit definitiv ausscheiden,sondern alle Möglichkeiten nur verschieden stark bewerten und zwar so,daß kein Gebilde von kleinerer Dimension als der gesamte Hypothesenbereich einen Wert ungleich Null erhält.Genauer gesagt,wir suchen eine Bewertung $\varphi | \mathfrak{P}$,sodaß φ eine stetige "Dichte" besitzt,welche stets größer ist als Null;unter einer "Dichte" verstehen wir dabei das folgende:

Sei $\mathfrak{F}^{i_1\ldots i_s}$ die Klasse der Borelschen Mengen des Simplex $T^{i_1\ldots i_s}$; $T^{\cdots} := \left\{(p_1^{\cdots},\ldots,p_{k-1}^{\cdots}) : p_i^{\cdots} \geq 0 ,\ \sum_{i=1}^{k-1} p_i^{\cdots} \leq 1\right\}$.

Auf Grund der natürlichen Abbildung zwischen den Simplizès $S^{\cdots}$ und $T^{\cdots}$ gilt dann: ${}^{B}\prod x\, \gamma^{i_1 \dots i_s} \cong {}^{B}\prod x\, \gamma^{i_1 \dots i_s}$.

Wir sagen nun, φ hat eine Dichte, wenn φ , übertragen auf ${}^{B}\prod x\, \gamma^{i_1 \dots i_s}$ und projiziert auf einen endlichen Abschnitt ${}^{B}\prod_{s=0}^{N-1} x\, \gamma^{i_1 \dots i_s}$, eine Dichte $f(\varphi, \varphi^1, \dots, \varphi^{\overbrace{k \dots k}^{N-1}})$, $\varphi^{\cdots} \in T^{\cdots}$ besitzt und zwar für jedes $N > 0$.

Auf Grund des Axioms NA6 lassen sich die Carnapschen Chancen mit einer solchen G-Bewertung gewinnen. Es gilt nämlich:

b) Satz

Sei $\chi(E)$ eine Chance auf $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft $\chi(X^1_{i_1} \dots X^N_{i_N}) \neq 0$ für jede Folge $i_1, \dots, i_N$. Dann existiert zu jedem N eine Funktion $f_N \mid \prod'_{0 \le s \le N-1} T^{i_1 \dots i_s}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) f_N ist auf seinem Definitionsbereich größer als 0 und stetig und im Innern beliebig oft stetig differenzierbar.

(2) $\int_{P_N} f_N dp = 1$ mit $P_N := \prod'_{0 \le s \le N-1} T^{i_1 \dots i_s}$.

(3) $\int_{P_N} p_{i_1} p^{i_1}_{i_2} \dots p^{i_1 \dots i_{N-1}}_{i_N} f_N dp = \chi(X^1_{i_1} \dots X^N_{i_N})$.

(4) $\int_{\prod' T^{i_1 \dots i_N}} f_{N+1}\, dp_1^{\overbrace{1 \dots 1}^{N}} \dots dp_{k-1}^{\overbrace{k \dots k}^{N}} = f_N$.

Nach dem Satz von Kolmogoroff führen die Funktionen f_N zu einer G-Bewertung $\varphi \mid \mathfrak{R}$, sodaß φ die Chance $\chi(E)$ besitzt und die Funktionen f_N als Dichten in dem unter a) definierten Sinne.

Beweis

Wir gehen von dem folgenden Produktansatz für f_N aus:

$$f_N(\varphi, \dots, \varphi^{k \dots k}) = \prod_{\substack{0 \le s \le N-1 \\ 1 \le i_v \le k}} f_{i_1 \dots i_s}(\varphi^{i_1 \dots i_s}) \quad , \varphi^{\cdots} \in T^{\cdots} .$$

Die Bedingungen (1),(2),(4) können wir dann durch die folgenden Forderungen erfüllen:

(i) $f_{i_1 \dots i_s}$ ist auf $T^{i_1 \dots i_s}$ stetig und größer als 0 und im Innern beliebig oft stetig differenzierbar.

(ii) $\int_{T^{\cdots}} f_{\cdots}(\varphi^{\cdots}) dp = 1$.

Um die Forderung (3) zu erfüllen, verlangen wir noch:

(iii) $$\int_{T^{i_1\ldots i_s}} p_j^{i_1\ldots i_s} f_{i_1\ldots i_s}\, dp = \frac{\chi(X^1_{i_1}\ldots X^s_{i_s} X^{s+1}_j)}{\chi(X^1_{i_1}\ldots X^s_{i_s})} =: a_j^{i_1\ldots i_s}$$

Aus (i)-(iii) folgt nämlich:

$$\int_{P_N} p_{i_1}\ldots p_{i_N}^{i_1\ldots i_{N-1}} f_N\, dp = \chi(X^1_{i_1}) \frac{\chi(X^1_{i_1}X^2_{i_2})}{\chi(X^1_{i_1})}\cdots\frac{\chi(X^1_{i_1}\ldots X^N_{i_N})}{\chi(X^1_{i_1}\ldots X^{N-1}_{i_{N-1}})}$$

$$= \chi(X^1_{i_1}\ldots X^N_{i_N}) \;.$$

Zu zeigen bleibt also, daß es solche Funktionen $f_{i_1\ldots i_s}$ gibt. Dabei wissen wir, daß die Zahlen $a_j^{i_1\ldots i_s}$ die folgende Eigenschaft haben: $a_j^{\cdots} > 0$, $\sum_{j=1}^{k-1} a_j^{\cdots} < 1$ (dies folgt nämlich aus der Voraussetzung $\chi(X^1_{i_1}\ldots X^N_{i_N}) > 0$). Diesen Nachweis erbringt der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz: Zu gegebenen Zahlen $a_1,\ldots,a_n$ mit $a_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$ existiert eine Funktion f , die auf dem n-dimensionalen Simplex $T := \left\{ \varphi \in R^n : x_i \geq 0 \,,\, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \right\}$ stetig ist und positiv und im Innern beliebig oft stetig differenzierbar, sodaß gilt:

$$\int_T f\, dx = 1 \;,\; \int_T \varphi f\, dx = \alpha \text{ mit } \alpha := (a_1,\ldots,a_n) \;.$$

Beweisskizze

Anschaulich gesprochen handelt es sich darum, eine Massenbelegung auf dem Simplex T zu finden, die α als Schwerpunkt hat, überall positiv und stetig ist und im Innern beliebig oft stetig differenzierbar.
Der Punkt α liegt im Innern des Simplex T ; also gibt es ein Simplex T', das im Innern von T liegt und den Punkt α ebenfalls im Innern enthält. $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ seien die Ecken von T'; K_i seien in T liegende Kugeln um diese Ecken. Es gibt beliebig oft stetig differenzierbare, bezüglich K_i kugelsymmetrische Funktionen f_i , die im Innern von K_i positiv sind und im Äußeren verschwinden, sodaß das Integral über diese Funktionen gleich 1 ist. Außerdem führen wir noch die konstante Funktion $f_{n+1} := 1/|T|$ ein; $|T|$ ist der Inhalt von T. Die gesuchte Funktion f läßt sich als Linearkombination der f_i gewinnen. Sei nämlich $f := \sum \lambda_i f_i$ mit $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$, so gilt: $\int_T \varphi f\, dx = \sum \lambda_i \varphi_i$.
Die Menge der Punkte $\sum \lambda_i \varphi_i$ stellt die konvexe Hülle der Punkte φ_i dar, enthält also T'. Unter der Einschränkung $\lambda_{n+1} > 0$ enthält diese Menge den offenen Kern von T' also auch den Punkt α . Ist $\lambda_{n+1} > 0$, so hat f alle gewünschten Eigenschaften.

(6.8) Satz

Es gibt eine "zulässige" Parameterdarstellung $\overline{P}$ von P , sodaß die Gleichverteilung über $\overline{P}$ zu einer G-Bewertung $\varphi|\overline{P}$ führt, die die Carnapschen Chancen liefert. Genauer gesagt:

Erfüllt die Chance $\chi(E)$ die Voraussetzung von (6.7b) (Regularität), so gibt es eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung g von der Menge $\prod' S^{i_1\ldots i_s}$ auf eine Menge $\prod' \bar{S}^{i_1\ldots i_s}$, $\bar{S}^{\cdots} \subset R^{k-1}$, sodaß das Produktmaß der Gleichverteilungen auf $^B\prod^x \bar{\gamma}^{i_1\ldots i_s}$ zu dieser Chance $\chi(E)$ führt; $\bar{\gamma}^{\cdots}$ ist die Klasse der Borelschen Mengen über $\bar{S}^{\cdots}$, $^B\prod^x \bar{\gamma}^{i_1\ldots i_s}$ eine "zulässige" Darstellung von $\mathfrak{F}$.

Beweis

Wir gehen von der nach (6.7b) existierenden G-Bewertung φ und den im Beweis zu (6.7b) eingeführten Dichtefunktionen $f_{i_1\ldots i_s}$ aus.
Die Abbildung g konstruieren wir "komponentenweise" aus Abbildungen $\tilde{g}^{i_1\ldots i_s} : S^{i_1\ldots i_s} \longrightarrow \bar{S}^{i_1\ldots i_s}$; die Abbildung $\tilde{g}^{\cdots}$ wiederum konstruieren wir aus der natürlichen Abbildung $h^{\cdots} : S^{\cdots} \longrightarrow T^{\cdots}$ (siehe (6.7a)) und einer Abbildung $g^{\cdots} : T^{\cdots} \longrightarrow \bar{S}^{\cdots}$. Der obige Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß es Mengen $\bar{S}^{\cdots} \subset R^{k-1}$ gibt, sowie bijektive, stetig differenzierbare Funktionen $\mathfrak{y} = g^{\cdots}(\mathfrak{x})$, $g^{\cdots} : T^{\cdots} \longrightarrow \bar{S}^{\cdots}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\bar{f}_{\cdots}(\mathfrak{y}) := f_{\cdots}(g^{-1\cdots}(\mathfrak{y}))\left|\frac{\partial g^{-1\cdots}(\mathfrak{y})}{\partial(\mathfrak{y})}\right| = 1 \quad ; \; g^{-1\cdots} \text{ ist die Umkehrfunktion von } g^{\cdots}.$$

Die G-Bewertung $\varphi|^B\prod^x \gamma^{i_1\ldots i_s}$ hat nämlich übertragen auf $^B\prod^x \bar{\gamma}^{i_1\ldots i_s}$ die Dichtefunktionen $\bar{f}_{\cdots}$ auf $\bar{S}^{\cdots}$.
Wir müssen also den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz: Sei $T \subset R^n$ dasselbe Simplex wie im Hilfssatz zu (6.7b); $f(\mathfrak{x})$ sei auf T positiv und stetig und im Innern stetig differenzierbar. Dann gibt es eine Menge $\bar{S} \subset R^n$ und eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $\mathfrak{g} : T \longrightarrow \bar{S}$ mit der Eigenschaft:

$$f(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{y}))\left|\frac{\partial \mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{y})}{\partial(\mathfrak{y})}\right| = 1 .$$

Beweis

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) := (g(\mathfrak{x}), x_2, \ldots, x_n) \quad , \; g(\mathfrak{x}) := \int_0^{x_1} f(t, \mathfrak{x}')\,dt \; , \; \mathfrak{x}' := (x_2, \ldots, x_n) .$$

1) Nach den Voraussetzungen über f ist $\mathfrak{g}$ stetig partiell differenzierbar.

2) $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ist eineindeutig; denn $g(t, \mathfrak{x}')$ ist bei festem $\mathfrak{x}'$ eineindeutig in t, da $\frac{\partial g(\mathfrak{x})}{\partial x_1} = f(\mathfrak{x}) > 0$.

3) $\frac{\partial \mathfrak{g}(\mathfrak{x})}{\partial(\mathfrak{x})} = \frac{\partial g(\mathfrak{x})}{\partial x_1} = f(\mathfrak{x})$. Also: $f(\mathfrak{x})\left|\frac{\partial(\mathfrak{x})}{\partial(\mathfrak{y})}\right| = f\left|\frac{\partial(\mathfrak{y})}{\partial(\mathfrak{x})}\right|^{-1} = f \cdot f^{-1} = 1$.

4) $\bar{S} := \mathfrak{g}(T)$.

Literaturverzeichnis

[C] Carnap, Stegmüller: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Wien 1958.

[C'] Carnap: Logical Foundations of Probability (second edition). Chicago 1962.

[C''] Carnap: The continuum of induktive methods. Chicago 1952.

[F] de Finetti: La prévision; ses lois logiques, ses sources subjectives. Annales de l'Institut Henri Poincaré, 7 (1937).

[G] N. Goodman: Fact, fiction, forecast. Cambridge 1959.

[H] P.R. Halmos: Measure theory. New York 1950.

[H'] R. Harrod: Foundations of Induktive Logic. London 1956.

[Hi] Hilbert, Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin 1959.

[J] H. Jeffreys: Theory of probability. Oxford 1939.

[K] H.E. Kyburg: Probability and the logic of rational belief. Middletown 1961.

[M] v. Mises: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien 1928, 1951.

[R] H. Richter: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Mathematische Annalen, Bd. 125 (1953), Bd. 126 (1953), Bd. 128 (1954).

[R'] H. Richter: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1956.

[S] Schilpp: The Philosophy of Rudolf Carnap. The Library of Living Philosophers XI ; La Salle, Illinois 1963.