Dedicatio ad Willim
Vroni

SCHNITTELIMINIERBARKEIT

IN DER EINFACHEN TYPENLOGIK

MIT EXTENSIONALITÄT

Diplomarbeit

Veronika Reiß

Universität München

April 1969

ÜBERSICHT:

VORWORT

Ich danke Herrn Professor Schütte für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine freundliche Beratung und Unterstützung bei der Durchführung.

An dieser Stelle möchte ich auch allen denen Dank aussprechen, die mein Studium ermöglicht haben:
meinen Eltern, der Siemens-Aktiengesellschaft in Erlangen und der Studienstiftung des deutschen Volkes.

EINLEITUNG

Seit Takeutis Untersuchungen über des Sequenzenkalkül GLC 1953 [9] ist das Problem der Schnitteliminierbarkeit in höheren Logiksystemen von größtem beweistheoretischem Interesse. Daß der Gentzen'sche Hauptsatz über die Schnittfreiheit von LK ebenso in GLC gilt, wird als Fundamentalvermutung von Takeuti bezeichnet. Aus ihrer Gültigkeit folgt die Konsistenz umfassender mathematischer Theorien, unter anderem der klassischen Analysis.

Für die Schnittfreiheit in der Logik 2. Stufe gibt es nichtkonstruktive Beweise von Prawitz [1] und Tait [6].[1] Unabhängig voneinander haben Prawitz 1967 [2] und Takahashi 1968 [7] die Fundamentalvermutung für die einfache Typenlogik bewiesen, und zwar auf demselben nichtkonstruktiven semantischen Weg. Beide Arbeiten stützen sich auf Untersuchungen von Schütte [3], der 1960 ein semantisches Äquivalent zur Fundamentalvermutung gefunden hat, und verwenden an zentraler Stelle eine nichtextensionale Modifizierung des Henkin'schen Modellbegriffs.

In einer unveröffentlichten Notiz von 1968 [8] hat Takahashi einen Beweis für die Schnittfreiheit von GLC mit Extensionalität skizziert, der auf demselben Gedanken beruht.

Die vorliegende Arbeit gibt einen Weg an, wie dieser Beweis durchgeführt werden kann. Sie bezieht sich auf das bei Schütte angegebene System der einfachen Typenlogik (erweitert um die Extensionalitätsschlußregel), das mit dem Begriff des Positivteils arbeitet und gewisse Vorteile gegenüber dem Sequenzenkalkül aufweist.

Am Ende der Arbeit wird der Beweisgang im Verhältnis zum Ansatz von Prawitz [2] diskutiert.

---

[1] Inzwischen hat Tait einen konstruktiven syntaktischen Beweis der Schnitteliminierbarkeit für ein Teilsystem der Logik 2.Stufe angegeben.

KAPITEL I: EINFACHE TYPENLOGIK MIT EXTENSIONALITÄT

In diesem Kapitel soll ein formales System der einfachen Typenlogik mit Extensionalität entwickelt werden, das sich eng an das von Schütte [3] (ohne Extensionalität) anlehnt. Die Formulierung der Extensionalitätsschlußregel (SE) ist analog zur Fassung von Takahashi in [8] für den Sequenzenkalkül GLC von Takeuti [9] gebildet.
Der Beweis des Extensionalitätssatzes in §5 schließt das Kapitel ab.

§1. Das formale System[1]

1.1. Induktive Definition der Typen:

1.1.1. 0 und 1 sind Typen.

1.1.2. Wenn $\tau_1,\dots,\tau_n$ Typen sind, so ist auch $(\tau_1,\dots,\tau_n)$ ein Typ.

1.2. Induktive Definition des Typgrads tgr für jeden Typ :

1.2.1. tgr $0 := 0$. tgr $1 := 0$.

1.2.2. tgr $(\tau_1,\dots,\tau_n) := 1 + \max_{i=1,\dots,n} \text{tgr } \tau_i$.

1.3. Grundzeichen:

1.3.1. Freie und gebundene Variable, abzählbar viele von jedem Typ.[2]

1.3.2. Höchstens abzählbar viele Funktionszeichen gegebener Stellenzahlen (deren Argumente und Werte dem Typ 0 angehören).

1.3.3. Logische Zeichen: $\neg$, $\vee$, $\bigvee$, λ und $\in$.

1.3.4. Hilfszeichen: runde und eckige Klammern, Komma.

---

[1] vgl. Schütte [3] §1.

[2] Die bei Schütte [3] 1.2.2. auftretenden Konstanten können wie bei Takahashi [7] mit freien Variablen identifiziert werden.

1.4. Mitteilungszeichen:

a^τ, b^τ, c^τ für freie Variable vom Typ τ,

x^τ für gebundene Variable vom Typ τ, beides auch mit unteren Indizes.

1.5. Definition: Eine n-stellige Nennform ist eine nichtleere, endliche Zeichenreihe, die außer Grundzeichen höchstens die Nennzeichen $*_1, \ldots, *_n$ enthält.

1.6. Mitteilungszeichen für Nennformen: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ (auch mit unteren Indizes).

1.7. Definition: Bezeichnet $\mathfrak{A}$ eine n-stellige Nennform und bezeichnen $u_1, \ldots, u_n$ Zeichen oder nichtleere, endliche Zeichenreihen, so bezeichne $\mathfrak{A}(u_1, \ldots, u_n)$ diejenige Zeichenreihe, die sich aus $\mathfrak{A}$ dadurch ergibt, daß die Nennzeichen $*_1, \ldots, *_n$ überall durch $u_1, \ldots, u_n$ ersetzt werden.

1.8. Induktive Definition der Ausdrücke und ihrer Typen:

1.8.1. Jede freie Variable vom Typ τ ist ein Ausdruck vom Typ τ.

1.8.2. Ist φ ein n-stelliges Funktionszeichen und sind $s_1, \ldots, s_n$ Ausdrücke vom Typ 0, so ist auch $\varphi(s_1, \ldots, s_n)$ ein Ausdruck vom Typ 0.

1.8.3. Sind $s_1, \ldots, s_n$ Ausdrücke der Typen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und ist t ein Ausdruck vom Typ $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, so ist $(s_1, \ldots, s_n \in t)$ ein Ausdruck vom Typ 1.

1.8.4. Ist A ein Ausdruck vom Typ 1, so auch $\neg A$.

1.8.5. Sind A und B Ausdrücke vom Typ 1, so ist auch $(A \vee B)$ ein Ausdruck vom Typ 1. (Runde Klammern werden weggelassen, wenn kein Mißverständnis möglich ist.)

1.8.6. Ist $\mathfrak{A}(a^\tau)$ ein Ausdruck vom Typ 1, in dem die gebundene Variable x^τ nicht auftritt, so ist auch $\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)$ ein Ausdruck vom Typ 1.

1.8.7. Ist $\mathfrak{A}(a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n})$ ein Ausdruck vom Typ 1 und sind $x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}$ paarweise verschiedene gebundene Variable, die darin nicht auftreten, so ist $\lambda x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}(x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n})$ ein Ausdruck vom Typ $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

1.9. Mitteilungszeichen für Ausdrücke:

$r^\tau, s^\tau, t^\tau, u^\tau, v^\tau$ für Ausdrücke vom Typ τ,
A,B,C,... für Ausdrücke vom Typ 1, beides auch mit unteren Indizes.

1.9.1. Bemerkung: Der obere Index τ bei Ausdrücken vom Typ τ wird manchmal weggelassen. Wenn kein Mißverständnis möglich ist, kann ein Ausdruck von der Gestalt $(r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in s^{(\tau_1, \ldots, \tau_n)})$ abkürzend durch $(r \in s)$ mitgeteilt werden.

1.9. Ausdrücke vom Typ 1 heißen Formeln.

1.10. Induktive Definition der Positivteile einer Formel F:

1.10.1. F ist ein Positivteil von F.

1.10.2. Ist $\neg\neg A$ ein Positivteil von F, so auch A.

1.10.3. Ist $(A \vee B)$ ein Positivteil von F, so sind auch A und B Positivteile von F.

1.11. Definition: Eine n-stellige Nennform $\mathfrak{A}$ heißt n-stellige Positivform, wenn gilt:

1.11.1. Jedes Nennzeichen $*_1, \ldots, *_n$ tritt in $\mathfrak{A}$ an genau einer Stelle auf.

1.11.2. Sind $A_1, \ldots, A_n$ Formeln, so ist $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$ eine Formel mit Positivteilen $A_1, \ldots, A_n$.

1.12. Bezeichnung: Ist $\mathfrak{A}$ eine n-stellige Positivform und sind $A_1, \ldots, A_n$ Formeln, so schreibt man $\mathfrak{A}[A_1, \ldots, A_n]$ statt $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$, um anzudeuten, daß es sich bei $\mathfrak{A}$ um eine Positivform handelt.

1.13. Mitteilungszeichen für Positivformen:

$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}^1, \mathfrak{q}^1$ für 1-stellige Positivformen,
$\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}^n$ für n-stellige Positivformen, beides auch mit unteren Indizes.

1.14. Definition: Primformeln sind:

1.14.1. die freien Variablen vom Typ 1;

1.14.2. alle Formeln der Gestalt $(r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1, \ldots, \tau_n)})$, wenn $a^{(\tau_1, \ldots, \tau_n)}$ eine freie Variable ist.

1.15. <u>Definition:</u> <u>Uneigentliche Primformeln</u>[1] sind alle Primformeln der Gestalt $(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{\tau})$, wobei a^{τ} eine freie Variable[2] vom Typ $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n) \neq (0,\ldots,0)$ ist. (Das Gleichheitszeichen wird metasprachlich verwendet.)

1.16. Alle übrigen Primformeln heißen <u>eigentliche Primformeln</u>.

1.17. <u>Folgerung:</u> Eigentliche Primformeln sind genau

1.17.1. alle freie Variablen vom Typ 1,

1.17.2. alle Primformeln der Gestalt $(r_1^0,\ldots,r_n^0 \in a)$, wo a eine freie Variable vom Typ $(0,\ldots,0)$ ist.

1.18. <u>Definition:</u> Ein Paar

$$\langle (r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\ldots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)})\rangle$$

von uneigentlichen Primformeln heißt <u>extensives Paar</u>, wenn für $i=1,\ldots,n$ gilt:
Ist $\tau_i = 0$, so ist $r_i^0 = s_i^0$.

1.19. <u>Definition:</u> Sei

$$\langle (r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\ldots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)})\rangle$$

ein extensives Paar und $\tau_i \neq 0$ genau für $i=i_1,\ldots,i_m$. Dann heißt für $i=i_1,\ldots,i_m$ jedes Formelpaar $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ und jedes Formelpaar $\langle \tilde{s}_i,\tilde{r}_i\rangle$ ein <u>Kontraktionspaar von</u> <u>$\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$</u>, wenn gilt:

1.19.1. Ist $\tau_i = 1$, so ist $\tilde{r}_i = r_i^1$ und $\tilde{s}_i = s_i^1$.

1.19.2. Ist $\tau_i = (\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_k})$ so ist

$$\tilde{r}_i = (a_{i_1}^{\sigma_1},\ldots,a_{i_k}^{\sigma_k} \in r_i^{\tau_i}) \text{ und } \tilde{s}_i = (a_{i_1}^{\sigma_1},\ldots,a_{i_k}^{\sigma_k} \in s_i^{\tau_i}),$$

wobei die $a_{i_1}^{\sigma_1},\ldots,a_{i_k}^{\sigma_k}$ beliebige freie Variable entsprechender Typen sind.

---

[1] Die Aufteilung der Primformeln in eigentliche und uneigentliche Primformeln ist von praktischer Wichtigkeit bei der Behandlung der Extensionalitätsschlußregel (SE) in §2.

[2] Enthält das System zusätzlich Konstanten, so muß man an dieser Stelle für a^{τ} auch eine Konstante zulassen. Andernfalls erhält man eine zu schwache Formulierung von (SE).

1.20. Definition: Ein extensives Paar
$<(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\ldots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)})>$
heißt extensives Paar der Formel F, wenn F von der Gestalt $\mathfrak{P}^2[\neg(r \in a),(s \in a)]$ ist.

1.21. Definition: Sei
$<(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\ldots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)})>$
ein extensives Paar der Formel F. Ein Kontraktionspaar $<\tilde{r}_i,\tilde{s}_i>$ bzw. $<\tilde{s}_i,\tilde{r}_i>$ heißt ein F-Kontraktionspaar von $<(r \in a),(s \in a)>$, wenn der Fall 1.19.1. vorliegt oder wenn andernfalls die in 1.19.2. erwähnten freien Variablen $a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\ldots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$ voneinander verschieden sind und nicht in F auftreten.

§2. Der Herleitungsbegriff[1]

2.1. Axiome sind alle Formeln $\mathfrak{P}^2[\neg P,P]$, wenn P eine eigentliche Primformel ist.[2]

2.2. Grundschlußregeln: Alle Prämissen und Konklusionen seien Formeln.

(S1) $\mathfrak{P}[\neg A],\ \mathfrak{P}[\neg B] \Longrightarrow \mathfrak{P}[\neg(A\ B)]$

(S2) $\mathfrak{P}[\neg\mathfrak{A}(a^\tau)] \Longrightarrow \mathfrak{P}[\neg \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)]$, wenn die freie Variable a^τ nicht in der Konklusion auftritt.

(S3) $\mathfrak{P}[\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)] \vee \mathfrak{A}(s^\tau) \Longrightarrow \mathfrak{P}[\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)]$

(S4a) $\mathfrak{P}[\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n})] \Longrightarrow$
$$\mathfrak{P}[(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}))]$$

(S4b) $\mathfrak{P}[\neg\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n})] \Longrightarrow$
$$\mathfrak{P}[\neg(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}))]$$

(S5) $F \vee \bigvee x^1 \neg(x^1 \vee \neg x^1) \Longrightarrow F$ (Schnittregel)

---

[1] vgl. Schütte [3] 1.6.ff.

[2] Wegen der Extensionalitätsschlußregel (SE) kann der Axiombegriff so eingeschränkt werden, vgl. Satz 3.8. und Schütte [3] 1.6..

(SE) A_i, B_i (für alle $i=1,\dots,n$ mit $\tau_i \neq 0$) $\Longrightarrow$
$\mathcal{P}^2[\neg(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\dots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)})]$
in folgenden Fällen:
$\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ ist extensives Paar der Konklusion K;
$A_i = K \vee \neg\tilde{r}_i \vee \tilde{s}_i$, $B_i = K \vee \neg\tilde{s}_i \vee \tilde{r}_i$, wobei $\langle \tilde{r}_i, \tilde{s}_i\rangle$ ein K-Kontraktionspaar von $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ ist.

2.3. Bemerkung: Die Bedingungen des Extensionalitätsschlusses (SE) lauten ausgeschrieben:
$a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)}$ ist freie Variable und $(\tau_1,\dots,\tau_n) \neq (0,\dots,0)$.
Für $\tau_i = 0$ ist $r_i^0 = s_i^0$.
Für $\tau_i = 1$ ist $A_i = \mathcal{P}^2[\neg(r \in a),(s \in a)] \vee \neg r_i^1 \vee s_i^1$,
$B_i = \mathcal{P}^2[\neg(r \in a),(s \in a)] \vee \neg s_i^1 \vee r_i^1$.
Für $\tau_i = (\sigma_{i_1},\dots,\sigma_{i_k})$ ist
$A_i =$
$\mathcal{P}^2[\neg(r\in a),(s\in a)] \vee \neg(a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\dots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}} \in r_i^{\tau_i}) \vee (a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\dots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}} \in s_i^{\tau_i})$,
$B_i =$
$\mathcal{P}^2[\neg(r\in a),(s\in a)] \vee \neg(a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\dots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}} \in r_i^{\tau_i}) \vee (a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\dots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}} \in s_i^{\tau_i})$,
wobei die $a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\dots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$ jeweils voneinander verschiedene freie Variable entsprechender Typen sind, die nicht in $\mathcal{P}^2[\neg(r \in a),(s \in a)]$ auftreten.

2.4. Bemerkung: Statt der Schlußregel (SE) könnte man auch die äquivalente Schlußregel (SE') verwenden:
(SE') A_i, B_i (für alle $i=1,\dots,n$ mit $\tau_i \neq 0$) $\Longrightarrow$
$\mathcal{P}^2[\neg(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\dots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)})]$
in folgenden Fällen:
$\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ ist extensives Paar der Konklusion K;
$A_i = \mathcal{P}^2[\neg\tilde{r}_i,\tilde{s}_i]$, $B_i = \mathcal{P}^2[\neg\tilde{s}_i,\tilde{r}_i]$, wobei $\langle \tilde{r}_i, \tilde{s}_i\rangle$ ein K-Kontraktionspaar von $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ ist.
Mit (SE') ließen sich alle Konstruktionen von Kapitel I/II analog durchführen, aber die in 8.3.1. definierte Semiwertung V würde die Extensionalitätsbedingung 8.1.9. nicht erfüllen, so daß man das Semantische Hauptlemma 8.3. nicht erhielte.

2.5. Definition: Die nicht in der Konklusion auftretenden freien Variablen a^{τ} (von (S2)) und $a_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, a_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$ (von (SE)) heißen Eigenvariable des betreffenden Schlusses.

2.6. Induktive Definition der Herleitbarkeit und der Herleitungsordnung:

2.6.1. Jedes Axiom ist mit Ordnung 0 herleitbar.

2.6.2. Sind die Prämissen $P_1, \ldots, P_n$ eines Grundschlusses mit den Ordnungen $m_1, \ldots, m_n$ herleitbar, so ist die Konklusion mit der Ordnung $m = \max(m_1, \ldots, m_n) + 1$ herleitbar.

2.7. Definition: Eine Formel heißt streng herleitbar, wenn sie ohne Benützung der Grundschlußregel (S5) herleitbar ist.

2.8. Bemerkung: Ist $\mathfrak{h}$ eine Herleitung der Formel F, so ist die Herleitungsordnung von F bezüglich $\mathfrak{h}$ eindeutig bestimmt.

§3. Syntaktische Eigenschaften der Ausdrücke[1]

Wie bei Schütte [3] §2 werden die Begriffe "Unterausdruckkette", "Regularität" eines Ausdrucks, "Rang" (grade) eines regulären Ausdrucks definiert. Es läßt sich zeigen, daß jeder Ausdruck regulär ist und daß der Rang jedes Unterausdrucks von r kleiner ist als der Rang von r.

3.1. Induktive Definition des Grades γr für jeden Ausdruck r. (Die Definition verläuft induktiv nach dem Rang von r.)

3.1.1. Zunächst sei zu jedem Typ τ eine feste freie Variable a_0^{τ} ausgewählt.

3.1.2. Ist r^{o} ein Ausdruck vom Typ 0, so sei $\gamma r^{o} := 0$.

3.1.3. Für jede freie Variable a^{τ} sei $\gamma a^{\tau} := \mathrm{tgr}\, \tau$.

---

[1] vgl. Schütte [3] §2, §3

(Freie Variable vom Typ 0 erhalten nach 3.1.2. und 3.1.3. den Grad 0.)

3.1.4. $\gamma(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}) := 1 + \max_{i=1,\ldots,n} \gamma r_i^{\tau_i}$,

3.1.5. $\gamma(\neg A) := 1 + \gamma A$.

3.1.6. $\gamma(A \vee B) := 1 + \max(\gamma A, \gamma B)$.

3.1.7. $\gamma \bigvee x^{\tau} \mathfrak{A}(x^{\tau}) := 1 + \gamma \mathfrak{A}(a_o)$.

3.1.8. $\gamma(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n})) :=$

$1 + \gamma \mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n})$.

3.1.9. $\gamma \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}) := 1 + \gamma \mathfrak{A}(a_o^{\tau_1},\ldots,a_o^{\tau_n})$

3.2. <u>Lemma:</u> Ist $\mathfrak{A}$ eine n-stellige Nennform und $\mathfrak{A}(a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n})$ ein Ausdruck, sind weiter $a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}$ und $b_1^{\tau_1},\ldots,b_n^{\tau_n}$ freie Variable entsprechender Typen, so ist $\gamma \mathfrak{A}(a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}) = \gamma \mathfrak{A}(b_1^{\tau_1},\ldots,b_n^{\tau_n})$.

Der Beweis verläuft induktiv nach dem Rang von $\mathfrak{A}(a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n})$ in völlig natürlicher Weise. Bei der Graddefinition werden freie Variable ja nur nach ihren Typen unterschieden.

<u>Folgerungen aus der Graddefinition 3.1.:</u> (3.3. bis 3.7.)

3.3. Ist $\langle (r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}), (s_1^{\tau_1},\ldots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}) \rangle$ ein extensives Paar und $\langle \tilde{r}_i, \tilde{s}_i \rangle$ eines seiner Kontraktionspaare, dann ist $\gamma(r \in a) > \gamma \tilde{r}_i$ und $\gamma(s \in a) > \gamma \tilde{s}_i$.

<u>Beweis:</u> Nach 3.1.4. genügt es, zu zeigen: $\gamma \tilde{r}_i = \gamma r_i^{\tau_i}$.

3.3.1. Ist $\tau_i = 1$, so ist $\tilde{r}_i = r_i^1$.

3.3.2. Ist $\tau_i = (\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_k})$, so ist mit gewissen freien Variablen $a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\ldots, a_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$ $\tilde{r}_i = (a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\ldots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}} \in r_i^{\tau_i})$.

3.3.2.1. Ist nun $r_i^{\tau_i}$ eine freie Variable, so ist

$$\gamma \tilde{r}_i = 1 + \max_{æ=1,\ldots,k} \gamma a_{i_æ}^{\sigma_{i_æ}} = 1 + \max_{æ=1,\ldots,k} \mathrm{tgr}\, \sigma_{i_æ} = \mathrm{tgr}\, \tau_i = \gamma r_i^{\tau_i}.$$

3.3.2.2. Ist aber $r_i^{\tau_i} = \lambda x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}\ldots x_{i_k}^{\sigma_{i_k}} \mathfrak{A}(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\ldots,x_{i_k}^{\sigma_{i_k}})$,

so ist $\gamma \tilde{r}_i = 1 + \gamma \mathfrak{A}(a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\ldots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}}) = \gamma \mathfrak{A}(a_o^{\sigma_{i_1}},\ldots,a_o^{\sigma_{i_k}}) + 1$

nach Lemma 3.2., also $\gamma\tilde{r}_i = \gamma r_i^{\tau_i}$.

3.4. $\gamma(\neg(A \vee B)) > \gamma(\neg A),\ \gamma(\neg B)$

Beweis: $\gamma(\neg(A\vee B)) = 1 + \gamma(A \vee B) = 2 + \max(\gamma A, \gamma B) > 1 + \gamma A = \gamma(\neg A)$ und $1 + \gamma B = \gamma(\neg B)$

3.5. $\gamma(\neg \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)) > \gamma(\neg\mathfrak{A}(a^\tau))$ für jede freie Variable a^τ. Beweis:

$\gamma(\neg\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)) = 1 + \gamma(\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)) = 2 + \gamma\mathfrak{A}(a_o^\tau) = 2 + \gamma\mathfrak{A}(a^\tau)$ nach 3.2. $> 1 + \gamma\mathfrak{A}(a^\tau) = \gamma(\neg\mathfrak{A}(a^\tau))$

3.6. $\gamma(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n})) > \gamma\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n})$

3.7. $\gamma(\neg(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}))) > \gamma(\neg\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n}))$

<u>Aussagenlogische Abgeschlossenheit des Systems:</u> [1]

3.8. Jede Formel $\mathfrak{R}^2[\neg C, C]$ ist streng herleitbar. (<u>Satz</u>). Beweis durch Induktion nach dem Grad von C.

3.8.1. C ist eigentliche Primformel. Dann ist $\mathfrak{R}^2[\neg C, C]$ Axiom.

3.8.2. C ist $\neg A$.

3.8.3. C ist $A \vee B$.

3.8.4. C ist $\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)$.

3.8.5. C ist $(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}))$.

Die Fälle 3.8.2. bis 3.8.5. erledigen sich wie die entsprechenden Fälle 3.4.2. bis 3.4.5. bei Schütte [3].

3.8.6. C ist die uneigentliche Primformel $(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)})$. Dann ist $\langle (r \in a), (r \in a)\rangle$ ein extensives Paar. Für alle $i=1,\dots,n$, für die $\tau_i \neq 0$ ist, seien $\langle \tilde{r}_i, \tilde{r}_i\rangle$ $\mathfrak{R}^2[\neg C, C]$-Kontraktionspaare von $\langle (r\in a),(r \in a)\rangle$. Nach 3.3. ist $\gamma\tilde{r}_i < \gamma(r \in a)$. Nach Induktionsvoraussetzung (IV) sind also die Formeln $A_i = \mathfrak{R}^2[\neg(r\in a),(r\in a)] \vee \neg\tilde{r}_i \vee \tilde{r}_i$ für alle $i=1,\dots,n$ mit $\tau_i \neq 0$ streng herleitbar. Ein Schluß (SE) liefert $\mathfrak{R}^2[\neg C, C]$.

---

[1] zur Rechtfertigung der geänderten Axiomdefinition.

§4. Syntaktische Schlußregeln

4.1. Definition: Ein Schluß $A_1,\ldots,A_n \Longrightarrow B$ mit Formeln $A_1,\ldots,A_n,B$ heißt zulässiger Schluß, wenn gilt: Sind $A_1,\ldots,A_n$ herleitbar, so ist auch B herleitbar.

4.2. Definition: Zwei Herleitungen heißen strukturgleich, wenn sie sich in derselben Weise nach denselben Grundschlußregeln zusammensetzen.

4.3. Definition: Sind A und B Formeln, so heißt $A \Longrightarrow B$ ein regulärer Schluß, wenn es zu jeder Herleitung von A eine strukturgleiche Herleitung von B gibt. Man charakterisiert diesen Sachverhalt durch $A \underset{\text{reg}}{\Longrightarrow} B$.

4.4. Folgerung: Ist $A \underset{\text{reg}}{\Longrightarrow} B$ ein regulärer Schluß und ist A mit der Ordnung m (streng) herleitbar, so ist auch B mit der Ordnung m (streng) herleitbar.
Jeder reguläre Schluß ist ein zulässiger Schluß.

4.5. Satz: Jede Vertauschung $\mathfrak{P}^2[A,B] \Longrightarrow \mathfrak{P}^2[B,A]$ ist ein regulärer Schluß.
Beweis durch Induktion nach der Herleitungsordnung m von $\mathfrak{P}^2[A,B]$ bezüglich einer gegebenen Herleitung $\mathfrak{h}$.

4.5.1. $m = 0$. Ist $\mathfrak{P}^2[A,B]$ Axiom, dann auch $\mathfrak{P}^2[B,A]$.

4.5.2. $m > 0$. Der letzte Grundschluß S von $\mathfrak{h}$ ist ein Schluß S der Gestalt $\mathfrak{P}_i^2[A_i,B_i]$ (für gewisse i) $\Longrightarrow \mathfrak{P}^2[A,B]$. Nach IV gibt es zu der durch $\mathfrak{h}$ gegebenen Herleitung von $\mathfrak{P}_i^2[A_i,B_i]$ eine strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{P}_i^2[B_i,A_i]$. Ein Schluß S führt zu $\mathfrak{P}^2[A,B]$, und man hat eine mit $\mathfrak{h}$ strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{P}^2[B,A]$.

4.6. Satz: Jede Substitution $\mathfrak{A}(a^\tau) \Longrightarrow \mathfrak{A}(b^\tau)$ ist ein regulärer Schluß, wenn die freie Variable a^τ nicht in $\mathfrak{A}$ auftritt.
Beweis durch Induktion nach der Herleitungsordnung m von $\mathfrak{A}(a^\tau)$ bezüglich einer gegebenen Herleitung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{A}(a^\tau)$. Man kann $a^\tau \neq b^\tau$ voraussetzen.

4.6.1. $m = 0$. Ist $\mathfrak{A}(a^\tau)$ Axiom, so auch $\mathfrak{A}(b^\tau)$.

4.6.2. $m > 0$. Der letzte Grundschluß S von $\mathfrak{h}$ sei kein Schluß (S2) oder (SE) mit Eigenvariabler b^τ. Er habe die

Gestalt $\mathfrak{A}_i(a^\tau)$ (für gewisse i) $\Longrightarrow \mathfrak{A}(a^\tau)$, wobei die Nennformen $\mathfrak{A}_i$ so gewählt seien, daß a^τ in keinem $\mathfrak{A}_i$ auftritt. Nach IV gibt es für jedes i zu der durch $\mathfrak{h}$ gegebenen Herleitung von $\mathfrak{A}_i(a^\tau)$ eine strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{A}_i(b^\tau)$. Mit S hat man eine zu $\mathfrak{h}$ strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{A}(b^\tau)$.

4.6.3. $m > 0$. Der letzte Grundschluß S von $\mathfrak{h}$ sei ein Schluß (S2) oder (SE) mit Eigenvariabler b^τ. Er habe die Gestalt $\mathfrak{A}_i(a^\tau,b^\tau)$ (für gewisse i) $\Longrightarrow \mathfrak{A}(a^\tau)$, wobei a^τ und b^τ in keiner der Nennformen $\mathfrak{A}_i$ auftreten mögen. Es sei nun c^τ eine freie Variable $\neq a^\tau$, die nicht in $\mathfrak{A}(b^\tau)$ auftritt. Nach IV gibt es für jedes i zu der durch $\mathfrak{h}$ gegebenen Herleitung von $\mathfrak{A}_i(a^\tau,b^\tau)$ eine strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{A}_i(a^\tau,c^\tau)$, und dazu wieder eine strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{A}_i(b^\tau,c^\tau)$. Ein Schluß S mit Eigenvariabler c^τ vervollständigt diese zu einer mit $\mathfrak{h}$ strukturgleichen Herleitung von $\mathfrak{A}(b^\tau)$.

4.7. <u>Satz:</u> Jede <u>Mehrfachsubstitution</u>
$\mathfrak{A}(a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}) \Longrightarrow \mathfrak{A}(b_1^{\tau_1},\ldots,b_n^{\tau_n})$ ist ein regulärer Schluß, wenn die $a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}$ voneinander verschiedene freie Variable sind, die nicht in $\mathfrak{A}$ auftreten.
Beweis durch Induktion nach n, $n \geqslant 1$.
Der Fall $n = 1$ ist durch Satz 4.6. gegeben. Sei jetzt $n > 1$ und $\mathfrak{h}$ eine Herleitung von $\mathfrak{A}(a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n})$. Seien weiter $c_1^{\tau_1},\ldots,c_n^{\tau_n}$ freie Variable, die untereinander und von den $a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}$, $b_1^{\tau_1},\ldots,b_n^{\tau_n}$ verschieden sind und nicht in auftreten. Nach IV gibt es eine zu $\mathfrak{h}$ strukturgleiche Herleitung $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{A}(c_1^{\tau_1},\ldots,c_{n-1}^{\tau_{n-1}},a_n^{\tau_n})$. Zu $\mathfrak{h}'$ gibt es nach Satz 4.6. eine strukturgleiche Herleitung $\mathfrak{h}''$ von $\mathfrak{A}(c_1^{\tau_1},\ldots,c_{n-1}^{\tau_{n-1}},c_n^{\tau_n})$, und zu $\mathfrak{h}''$ gibt es nach IV eine strukturgleiche Herleitung $\mathfrak{h}'''$ von $\mathfrak{A}(b_1^{\tau_1},\ldots,b_{n-1}^{\tau_{n-1}},c_n^{\tau_n})$. Zu $\mathfrak{h}'''$ gibt es nach Satz 4.6. eine strukturgleiche Herleitung $\mathfrak{h}^{IV}$ von $\mathfrak{A}(b_1 1,\ldots,b_n n)$. $\mathfrak{h}^{IV}$ ist aber auch mit $\mathfrak{h}$ strukturgleich, womit der Satz bewiesen ist.

4.8. <u>Satz: Jede Abschwächung</u> $\mathfrak{P}[A] \Longrightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]]$ ist ein regulärer Schluß.
Beweis durch Induktion nach der Herleitungsordnung m von

$\mathfrak{P}[A]$ bezüglich einer gegebenen Herleitung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{P}[A]$.

4.8.1. m = 0. Ist $\mathfrak{P}[A]$ Axiom, dann auch $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}_o[A]]$.

4.8.2. m > 0. Der letzte Grundschluß S von $\mathfrak{h}$ habe keine in $\mathfrak{P}_o$ auftretende Eigenvariable. S ist von der Gestalt $\mathfrak{P}_i[A_i]$ (für gewisse i) $\Longrightarrow \mathfrak{P}[A]$. Nach IV gibt es zu der durch $\mathfrak{h}$ gegebenen Herleitung von $\mathfrak{P}_i[A_i]$ eine strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{P}_i[\mathfrak{P}_o[A_i]]$. Ein Schluß S vervollständigt diese zu einer mit $\mathfrak{h}$ strukturgleichen Herleitung von $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}_o[A]]$.

4.8.3. m > 0. Der letzte Grundschluß S von $\mathfrak{h}$ sei ein Schluß (S2) oder (SE) mit Eigenvariablen, die in $\mathfrak{P}_o$ auftreten. Dann hat S die Gestalt $\mathfrak{A}_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_{n_i}}) \Longrightarrow A$ (für gewisse i), wobei die $a_{i_1},\ldots,a_{i_{n_i}}$ die einzigen voneinander verschiedenen Eigenvariablen von S seien, die in $\mathfrak{A}_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_{n_i}})$ und in $\mathfrak{P}_o$ vorkommen. Die Nennformen $\mathfrak{A}_i$ seien so gewählt, daß die $a_{i_1},\ldots,a_{i_{n_i}}$ nicht in $\mathfrak{A}_i$ vorkommen. Es ist $n_i \geqslant 0$ für jedes i, aber $\sum_i n_i \geqslant 1$, da sonst der Fall 4.8.2. vorliegt. Für jedes i seien jetzt $b_{i_1},\ldots,b_{i_{n_i}}$ voneinander verschiedene freie Variable, die weder in $\mathfrak{A}_i$ noch in $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}_o[A]]$ auftreten. Nach Satz 4.7. gibt es dann für jedes i eine zu der durch $\mathfrak{h}$ gegebenen Herleitung von $\mathfrak{A}_i(a_{i_1},\ldots,a_{i_{n_i}})$ strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{A}_i(b_{i_1},\ldots,b_{i_{n_i}})$. Ein Schluß S mit den Eigenvariablen $b_{i_1},\ldots,b_{i_{n_i}}$ liefert schließlich eine zu $\mathfrak{h}$ strukturgleiche Herleitung von $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}_o[A]]$.

4.9. <u>Satz:</u> Die <u>spezielle Schnittregel</u>
$F \vee A,\ F \vee \neg A \Longrightarrow F$ ist eine zulässige Schlußregel.
Beweis: Aus $F \vee A$ folgt durch Abschwächung $F \vee \neg\neg A$. Mit $F \vee \neg A$ und (S1) hat man $F \vee \neg(A \vee \neg A)$. Abschwächung liefert $F \vee \bigvee x^1 \neg(x^1 \vee \neg x^1) \vee \neg(A \vee \neg A)$. (S3) erlaubt die Streichung des letzten Adjunktionsgliedes, und mit (S5) hat man F.

§5. Der Extensionalitätssatz

5.1. Definition von $r^\tau \sim s^\tau$ für $\tau \neq 0$:

5.1.1. $r^1 \sim s^1$ sei die Formel $\neg(r^1 \vee s^1) \vee \neg(\neg r^1 \vee \neg s^1)$.

5.1.2. Für $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sei $r^\tau \sim s^\tau$ die Formel

$\neg \bigvee x_1^{\tau_1} \ldots \bigvee x_n^{\tau_n} ((x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n} \in r^\tau) \sim (x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n} \in s^\tau))$.

5.2. Extensionalitätssatz: Für $\tau \neq 0$ ist die Formel

$E(r^\tau, s^\tau, \mathfrak{A}) :\equiv \neg(r^\tau \sim s^\tau) \vee \neg \mathfrak{A}(r^\tau) \vee \mathfrak{A}(s^\tau)$ herleitbar.

Beweis durch Induktion nach dem Grad von $\mathfrak{A}(a^\tau)$.

Induktionsvoraussetzung: $E(r_1^\tau, s_1^\tau, \mathfrak{B})$, für beliebige Ausdrücke r_1^τ, s_1^τ, falls $\gamma\mathfrak{B}(a^\tau) < \gamma\mathfrak{A}(a^\tau)$.

5.2.1. $\tau = 1$:

5.2.1.1. $\mathfrak{A}(a^1) = a^1$.

$E(r^1, s^1, \mathfrak{A}) = \neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg r^1 \vee s^1 =$

$= \neg(\neg(r^1 \vee s^1) \vee \neg(\neg r^1 \vee \neg s^1)) \vee \neg r^1 \vee s^1$

Nach Satz 3.8. sind die Formeln

$\neg(\neg(r^1 \vee s^1)) \vee \neg r^1 \vee s^1$ und $\neg(\neg(\neg r^1 \vee \neg s^1)) \vee \neg r^1 \vee s^1$ herleitbar.

Ein Schluß (S1) liefert $E(r^1, s^1, \mathfrak{A})$.

5.2.1.2. $\mathfrak{A}(a^1) = \neg \mathfrak{A}_1(a^1)$.

Nach IV ist $E(s^1, r^1, \mathfrak{A}_1) = \neg(s^1 \sim r^1) \vee \neg \mathfrak{A}_1(s^1) \vee \mathfrak{A}_1(r^1)$ herleitbar. Vertauschungen und Abschwächungen liefern

$\neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg\neg \mathfrak{A}_1(r^1) \vee \mathfrak{A}_1(s^1) = E(r^1, s^1, \mathfrak{A})$.

5.2.1.3. $\mathfrak{A}(a^1) = \mathfrak{A}_1(a^1) \vee \mathfrak{A}_2(a^1)$.

Nach IV ist $E(r^1, s^1, \mathfrak{A}_i) = \neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg \mathfrak{A}_i(r^1) \vee \mathfrak{A}_i(s^1)$ für $i=1,2$ herleitbar. Durch Abschwächen erhält man

$\neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg \mathfrak{A}_i(r^1) \vee \mathfrak{A}_1(s^1) \vee \mathfrak{A}_2(s^1)$ für $i=1,2$.

Ein Schluß (S1) liefert $E(r^1, s^1, \mathfrak{A})$.

5.2.1.4. $\mathfrak{A}(a^1) = \bigvee x^\sigma \mathfrak{A}_1(x^\sigma, a^1)$.

Es sei a^σ eine freie Variable, die nicht in $E(r^1, s^1, \mathfrak{A})$ auftritt. Nach IV ist $\neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg \mathfrak{A}_1(a^\sigma, r^1) \vee \mathfrak{A}_1(a^\sigma, s^1)$ herleitbar. Durch Abschwächen erhält man

$\neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg \mathfrak{A}_1(a^\sigma, r^1) \vee \bigvee x^\sigma \mathfrak{A}_1(x^\sigma, s^1) \vee \mathfrak{A}_1(a^\sigma, s^1)$.

Ein Schluß (S3) erlaubt die Streichung des letzten Adjunktionsgliedes, und ein Schluß (S2) mit Eigenvariabler a^σ liefert $E(r^1, s^1, \mathfrak{A})$.

5.2.1.5. $\mathfrak{A}(a^1) = (\sigma_1(a^1), \ldots, \sigma_m(a^1) \in \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m} \mathfrak{A}_1(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_m^{\sigma_m}, a^1))$, wobei die $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$

einstellige Nennformen und $\vartheta_1(a^1),\dots,\vartheta_m(a^1)$ Ausdrücke der Typen $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ sind. Nach IV ist $E(r^1,s^1,\mathfrak{A}_1) = \neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg\mathfrak{A}_1(\vartheta_1(r^1),\dots,\vartheta_m(r^1),r^1) \vee \mathfrak{A}_1(\vartheta_1(s^1),\dots,\vartheta_m(s^1),s^1)$ herleitbar. Zwei Schlüsse (S4a), (S4b) liefern $E(r^1,s^1,\mathfrak{A})$.

5.2.1.6. $\mathfrak{A}(a^1) = (\vartheta_1(a^1),\dots,\vartheta_m(a^1) \in b^\sigma)$, wobei b^σ eine freie Variable vom Typ $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ ist, die $\vartheta_1,\dots,\vartheta_m$ einstellige Nennformen und $\vartheta_1(a^1),\dots,\vartheta_m(a^1)$ Ausdrücke der Typen $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ sind.

5.2.1.6.1. Ist nun $\sigma = (0,\dots,0)$, so tritt a^1 in $\vartheta_1(a^1),\dots,\vartheta_m(a^1_m)$ nicht auf, es ist $\mathfrak{A}(r^1) = \mathfrak{A}(s^1)$ und $E(r^1,s^1,\mathfrak{A})$ nach Satz 3.8. herleitbar.

5.2.1.6.2. Ist aber $\sigma \neq (0,\dots,0)$, so seien $i_1,\dots,i_k$ genau die Indizes mit $\sigma_{i_1},\dots,\sigma_{i_k} \neq 0$. Für $i = i_1,\dots,i_k$ ist dann $\vartheta_i(r^1) = \vartheta_i(s^1)$; es ist also $\langle\mathfrak{A}(r^1),\mathfrak{A}(s^1)\rangle$ ein extensives Paar. Für $i = i_1,\dots,i_k$ seien $\langle\widetilde{\vartheta_i(r^1)},\widetilde{\vartheta_i(s^1)}\rangle$ $E(r^1,s^1,\mathfrak{A})$-Kontraktionspaare von $\langle\mathfrak{A}(r^1),\mathfrak{A}(s^1)\rangle$. Nach IV (vgl. 3.3.) sind die Formeln $\neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg\widetilde{\vartheta_i(r^1)} \vee \widetilde{\vartheta_i(s^1)}$ und $\neg(r^1 \sim s^1) \vee \neg\widetilde{\vartheta_i(s^1)} \vee \widetilde{\vartheta_i(r^1)}$ herleitbar. Durch Abschwächen erhält man
$A_i = E(r^1,s^1,\mathfrak{A}) \vee \neg\widetilde{\vartheta_i(r^1)} \vee \widetilde{\vartheta_i(s^1)}$ und
$B_i = E(r^1,s^1,\mathfrak{A}) \vee \neg\widetilde{\vartheta_i(s^1)} \vee \widetilde{\vartheta_i(r^1)}$ für $i = i_1,\dots,i_k$.
Das sind die Prämissen eines Schlusses (SE) mit der Konklusion $E(r^1,s^1,\mathfrak{A})$.

Also ist $E(r^\tau,s^\tau,\mathfrak{A})$ für $\tau = 1$ herleitbar.

5.2.2. $\underline{\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n).}$ $\quad E(r^\tau,s^\tau,\mathfrak{A}) =$

$$\neg\neg\bigvee x_1^{\tau}1 .. \bigvee x_n^{\tau}n \neg((x_1^{\tau}1,\dots,x_n^{\tau}n \in r^\tau) \sim (x_1^{\tau}1,\dots,x_n^{\tau}n \in s^\tau)) \vee \neg\mathfrak{A}(r^\tau) \vee \mathfrak{A}(s\ )$$

5.2.2.1. $\mathfrak{A}(a^\tau) = (t_1^{\tau}1,\dots,t_n^{\tau}n \in a^\tau)$, wobei a^τ nicht in den Ausdrücken $t_1^{\tau}1,\dots,t_n^{\tau}n$ auftritt. Die Formel $\neg((t \in r^\tau) \sim (t \in s^\tau)) \vee \neg(t \in r^\tau) \vee (t \in s^\tau)$ ist von der Gestalt $\neg(r_o^1 \sim s_o^1) \vee \neg r_o^1 \vee s_o^1$ und nach 5.2.1.1. herleitbar. Abschwächung und Vertauschung führt zu

$$\bigvee x_1^{\tau}1 .. \bigvee x_n^{\tau}n \neg((x_1^{\tau}1,\dots,x_n^{\tau}n \in r^\tau) \sim (x_1^{\tau}1,\dots,x_n^{\tau}n \in s^\tau)) \vee \neg\mathfrak{A}(r^\tau) \vee \mathfrak{A}(s^\tau) \vee \neg((t_1^{\tau}1,\dots,t_n^{\tau}n \in r^\tau) \sim (t_1^{\tau}1,\dots,t_n^{\tau}n \in s^\tau)).$$

(S3) erlaubt die Streichung des letzten Adjunktionsgliedes, und mit zwei Abschwächungen hat man $E(r^\tau,s^\tau,\mathfrak{A})$.

5.2.2.2. $\mathfrak{A}(a^{\tau}) = \neg \mathfrak{A}_1(a^{\tau})$.

5.2.2.3. $\mathfrak{A}(a^{\tau}) = \mathfrak{A}_1(a\ ) \vee \mathfrak{A}_2(a\ )$.

5.2.2.4. $\mathfrak{A}(a^{\tau}) = \bigvee x^{\sigma} \mathfrak{A}_1(x^{\sigma}, a^{\tau})$.

5.2.2.5. $\mathfrak{A}(a^{\tau}) = (\mathfrak{z}_1(a^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_m(a^{\tau}) \in \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m} \mathfrak{A}_1(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_m^{\sigma_m}, a^{\tau}))$, wobei $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m$ einstellige Nennformen und $\mathfrak{z}_1(a^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_m(a^{\tau})$ Ausdrücke der Typen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sind.

5.2.2.6. $\mathfrak{A}(a^{\tau}) = (\mathfrak{z}_1(a^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_m(a^{\tau}) \in b^{\sigma})$, wobei b^{σ} eine freie Variable $\neq a^{\tau}$ vom Typ $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ ist, die $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m$ einstellige Nennformen und $\mathfrak{z}_1(a^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_m(a^{\tau})$ Ausdrücke der Typen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sind. Dabei kann $\sigma = \tau$ sein.

Die Fälle 5.2.2.2. bis 5.2.2.6. erledigen sich wie die entsprechenden Fälle 5.2.1.2. bis 5.2.1.6. für $\tau = 1$.

5.2.2.7. $\mathfrak{A}(a^{\tau}) = (\mathfrak{z}_1(a^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_n(a^{\tau}) \in a^{\tau})$, wobei $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ist, die $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ einstellige Nennformen und $\mathfrak{z}_1(a^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_n(a^{\tau})$ Ausdrücke der Typen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind.

Es sei $\mathfrak{B}$ eine Nennform, die durch $\mathfrak{B} := (\mathfrak{z}_1(r^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_n(r^{\tau}) \in *_1)$ definiert ist, so daß $\mathfrak{B}(r^{\tau}) = \mathfrak{A}(r^{\tau})$. Für die Nennform $\mathfrak{B}$ ist jetzt der Fall 5.2.2.1. anwendbar, so daß $E(r^{\tau}, s^{\tau}, \mathfrak{B}) = \neg(r^{\tau} \sim s^{\tau}) \vee \neg \mathfrak{B}(r^{\tau}) \vee \mathfrak{B}(s^{\tau})$ herleitbar ist. $\mathfrak{B}(s^{\tau})$ ist die Formel $(\mathfrak{z}_1(r^{\tau}), \ldots, \mathfrak{z}_n(r^{\tau}) \in s^{\tau})$. Die Nennform $\mathfrak{L}$ sei definiert durch $\mathfrak{L} := (\mathfrak{z}_1(*_1), \ldots, \mathfrak{z}_n(*_1) \in s^{\tau})$, so daß $\mathfrak{L}(r^{\tau}) = \mathfrak{B}(s^{\tau})$ und $\mathfrak{L}(s^{\tau}) = \mathfrak{A}(s^{\tau})$ gilt. Ist jetzt s^{τ} eine freie Variable, so ist der Fall 5.2.2.6. anwendbar. Ist aber $s^{\tau} = \lambda x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}_1(x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n})$, so ist der Fall 5.2.2.5. anwendbar (jedesmal bezüglich der Nennform $\mathfrak{L}$). In beiden Fällen erhält man $E(r^{\tau}, s^{\tau}, \mathfrak{L}) = \neg(r^{\tau} \sim s^{\tau}) \vee \neg \mathfrak{L}(r^{\tau}) \vee \mathfrak{L}(s^{\tau})$. Aus den Formeln $E(r^{\tau}, s^{\tau}, \mathfrak{B})$ und $E(r^{\tau}, s^{\tau}, \mathfrak{L})$ gewinnt man durch Abschwächen und Vertauschen

$\neg(r^{\tau} \sim s^{\tau}) \vee \neg \mathfrak{A}(r^{\tau}) \vee \mathfrak{A}(s^{\tau}) \vee \mathfrak{B}(s^{\tau})$ und

$\neg(r^{\tau} \sim s^{\tau}) \vee \neg \mathfrak{A}(r^{\tau}) \vee \mathfrak{A}(s^{\tau}) \vee \neg \mathfrak{B}(s^{\tau})$. Daraus ist mit der speziellen Schnittregel 4.9. $E(r^{\tau}, s^{\tau}, \mathfrak{A})$ herleitbar.

Jetzt ist der Extensionalitätssatz vollständig bewiesen.

KAPITEL II: SEMANTISCHE CHARAKTERISIERUNG DER STRENGEN HERLEITBARKEIT

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des Semantischen Hauptlemmas in §8: Ist die Formel F nicht streng herleitbar, so gibt es eine Semiwertung V mit VF = f. Die Umkehrung, eine Art Konsistenzsatz, gilt ebenfalls, wird aber hier nicht gebraucht.
(vgl. Schütte [3] 6.5.,6.6. und Theorem I)

§6. Klassifikation von Formeln und Formelteilen[1]

6.1. Für jeden Typ τ sei eine Abzählung $a_1^\tau, a_2^\tau, a_3^\tau, \ldots$ aller freien Variablen sowie eine Abzählung $r_1^\tau, r_2^\tau, r_3^\tau, \ldots$ aller Ausdrücke vom Typ τ gegeben. Nach 1.8. ist die Menge aller Ausdrücke abzählbar.

6.2. Definition: Ein extensives Paar (vgl. 1.18.)
$\langle (r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1, \ldots, \tau_n)}), (s_1^{\tau_1}, \ldots, s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1, \ldots, \tau_n)}) \rangle$
der Formel F heißt abgesättigt, wenn F die Gestalt
$\mathcal{P}^4[\neg(r \in a), (s \in a), \neg\tilde{r}_i, \tilde{s}_i]$ oder
$\mathcal{P}^4[\neg(r \in a), (s \in a), \neg\tilde{s}_i, \tilde{r}_i]$ hat, wobei $\langle \tilde{r}_i, \tilde{s}_i \rangle$ ein F-Kontraktionspaar von $\langle (r \in a), (s \in a) \rangle$ ist. (vgl. 1.21.)

6.3. Definition: Eine Formel heißt extensiv, wenn sie wenigstens ein nicht-abgesättigtes extensives Paar besitzt.

6.4. Definition: Sei F eine extensive Formel und sei $\langle (r \in a), (s \in a) \rangle$ das in F an erster Stelle auftretende[2] nicht-abgesättigte extensive Paar von F. Dann heißen alle Formeln
$F \vee \neg\tilde{r}_i \vee \tilde{s}_i$ und $F \vee \neg\tilde{s}_i \vee \tilde{r}_i$
Kontraktionen von F, wenn $\langle \tilde{r}_i, \tilde{s}_i \rangle$ F-Kontraktionspaare von $\langle (r \in a), (s \in a) \rangle$ und die in 1.19.2. erwähnten freien

---

1) vgl. Schütte [3] §5.

2) Man ordne zuerst nach dem linken, dann nach dem rechten Teil der extensiven Paare von F.

Variablen $a_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\dots,a_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$ jeweils die ersten der entsprechenden Typen sind, die nicht in F auftreten und voneinander verschieden sind.

6.5. <u>Definition:</u> Eine uneigentliche Primformel P heißt <u>freier Teil von F</u>, wenn gilt:
P oder $\neg P$ ist Positivteil von F, und es gibt keine Formel A, so daß $\langle A,P\rangle$ oder $\langle P,A\rangle$ abgesättigtes extensives Paar von F ist.

6.6. <u>Definition:</u> Die <u>reduziblen Teile einer Formel F</u> sind alle Positivteile von F der Gestalt
$\neg(A \vee B)$
$\neg \bigvee x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau})$
$(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}))$
$\neg(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}))$

6.7. <u>Definition der Reduzierten C^* eines reduziblen Teiles C einer Formel F:</u>

6.7.1. $\neg A$ und $\neg B$ sind Reduzierte von $\neg(A \vee B)$.

6.7.2. $\neg\mathfrak{A}(a^{\tau})$ ist Reduzierte von $\neg\bigvee x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau})$, wenn a^{τ} in der gegebenen Abzählung der freien Variablen die erste ist, die nicht in $\mathfrak{A}$ auftritt.

6.7.3. $\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n})$ ist Reduzierte von $(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}))$.

6.7.4. $\neg\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n})$ ist Reduzierte von $\neg(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}))$.

6.8. <u>Definition:</u> Eine Formel heißt <u>reduzibel</u>, wenn sie wenigstens einen reduziblen Teil hat.

6.9. <u>Definition:</u> Sei $F = \mathfrak{P}[C]$ eine reduzible Formel und C der in F an erster Stelle auftretende reduzible Teil von F. Dann heißt jede Formel $\mathfrak{P}[C^*]$ eine <u>Reduktion von F</u>, wenn C^* eine Reduzierte von C ist.

6.10. <u>Definition:</u> Die <u>kritischen Teile einer Formel F</u> sind alle Positivteile von F, die die Gestalt $\bigvee x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau})$ haben.

6.11. <u>Definition:</u> Eine Formel heißt <u>kritisch</u>, wenn sie wenigstens einen kritischen Teil hat.[1]

6.12. Definition: Ist F eine kritische Formel und sind $\bigvee x_1^{\tau_1} \mathfrak{A}_1(x_1^{\tau_1}), \ldots, \bigvee x_m^{\tau_m} \mathfrak{A}_m(x_m^{\tau_m})$ die kritischen Teile von F, so sei die n-te Abschwächung von F diejenige Formel, die aus F durch Adjunktion aller Formeln $\mathfrak{A}_i(r_k^{\tau_i})$ für $i=1,\ldots,m$ und $k=1,\ldots,n$ hervorgeht. Die Reihenfolge der Adjunktionsglieder sei irgendwie normiert.

6.13. Definition: Eine Formel heißt primitiv, wenn sie weder extensiv noch reduzibel noch kritisch ist.

6.14. Definition: Der Reduzibilitätsgrad ϱF einer Formel F sei die Summe der Grade aller reduziblen Teile von F.

6.15. Definition: Der Extensionalitätsgrad εF einer Formel F sei die Summe der Grade aller freien Teile von F.

6.16. Hauptlemma über Grade:

6.16.1. Ist G eine Reduktion der reduziblen Formel F, so ist $\varrho G < \varrho F$.

6.16.2. Ist G eine Kontraktion der extensiven Formel F, so ist $\varepsilon G < \varepsilon F$.

Beweis:

6.16.3. Sei G eine Reduktion der reduziblen Formel F. Seien $R_1,\ldots,R_m$ die reduziblen Teile von F in der Reihenfolge ihres Auftretens in F. Ist $F = \mathfrak{P}[R_1]$, so ist $G = \mathfrak{P}[R_1^*]$, wobei R_1^* eine Reduzierte von R_1 ist. Nach 6.7. und 3.4., 3.5., 3.6., 3.7., ist $\gamma R_1 > \gamma R_1^* \geqslant 0$. Damit gilt:

$\varrho F = \gamma R_1 + \sum_{\mu=2}^{m} \gamma R_\mu > \gamma R_1^* + \sum_{\mu=2}^{m} \gamma R_\mu \geqslant \varrho G$, denn G hat höchstens die reduziblen Teile $R_1^*, R_2, \ldots, R_m$.

6.16.4. Sei nun G eine Kontraktion der extensiven Formel F. Seien $F_1,\ldots,F_m$ die freien Teile von F, und sei $\langle F_1, F_2\rangle$ das an erster Stelle stehende nichtabgesättigte extensive Paar von F. G hat dann die Gestalt $F \vee \neg \widetilde{F}_1 \vee \widetilde{F}_2$ oder $F \vee \neg \widetilde{F}_2 \vee \widetilde{F}_1$, wobei $\langle \widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2\rangle$ ein F-Kon-

---

[1] Diese Definition weicht von Schüttes Definition 5.3.2. in [3] ab.

traktionspaar von $\langle F_1, F_2 \rangle$ ist. Damit ist $\langle F_1, F_2 \rangle$ in G abgesättigt. Nach 3.3. ist $\gamma F_i > \gamma \widetilde{F}_i \geq 0$ für i=1,2. Damit hat man:

$$\varepsilon F = \gamma F_1 + \gamma F_2 + \sum_{\mu=3}^{m} \gamma F_\mu > \gamma F_1 + \gamma F_2 + \sum_{\mu=3}^{m} \gamma F_\mu \geq \varepsilon G,$$

denn G hat höchstens die freien Teile $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m$.

§7. Deduktionsfäden

7.1. Definition:
Ein Deduktionsfaden $\triangle(F)$ einer Formel F ist eine endliche oder unendliche Folge $F_o, F_1, F_2, \ldots$ von Formeln mit folgenden Eigenschaften:

7.1.1. F_o ist F.

7.1.2. Ist F_n Axiom oder primitiv, so sei F_n letzte Formel von $\triangle(F)$.

7.1.3. Andernfalls sei F_{n+1} durch folgendes Schema gegeben:

<table>
<tr><th>Klassifikation von F_n</th><th>n = 0
F_n ist Kontraktion von F_{n-1}
F_n ist n-te Abschwächung von F_{n-1}</th><th>F_n ist Reduktion von F_{n-1}</th></tr>
<tr><td>extensiv, nichtreduzibel</td><td rowspan="2">F_{n+1} sei eine Kontraktion von F_n. 1</td><td>F_{n+1} sei eine n-te Abschwächung von F_n, falls F_n kritisch ist, andernfalls eine Kontraktion von F_n. 4</td></tr>
<tr><td>extensiv, reduzibel</td><td rowspan="2">F_{n+1} sei eine Reduktion von F_n. 5</td></tr>
<tr><td>nichtextensiv, reduzibel</td><td>F_{n+1} sei eine Reduktion von F_n. 2</td></tr>
<tr><td>nichtextensiv, nichtreduzibel</td><td>F_{n+1} sei eine n-te Abschwächung von F_n. 3</td><td>F_{n+1} sei eine n-te Abschwächung von F_n. 6</td></tr>
</table>

7.2. Bemerkung: Man hat zur Erzeugung eines Deduktionsfadens im Turnus folgende Operationen auszuführen: Kontrahieren so oft wie möglich, reduzieren so oft wie möglich, dann einmal abschwächen.

7.3. Satz: Ist F nicht streng herleitbar, so gibt es einen Deduktionsfaden $\Delta(F) = F_o, F_1, F_2, \ldots$ ohne streng herleitbare Formel, insbesondere ohne Axiom.
Beweis durch Konstruktion eines solchen Fadens (Induktion nach n).
F_o ist nach Voraussetzung nicht streng herleitbar. Seien nun $F_o, F_1, \ldots, F_n$ nicht streng herleitbar ($n \geqslant 0$). Dann ist entweder F_n primitiv, somit letzte Formel, und man hat einen Faden ohne streng herleitbare Formel, oder es gibt F_{n+1}. Wäre nun jedes mögliche F_{n+1} streng herleitbar, so wäre auch F_n streng herleitbar, im Widerspruch zur IV, denn:

7.3.1. Ist F_{n+1} n-te Abschwächung von F_n, so kommt man mit endlich vielen Schlüssen (S3) zu F_n.

7.3.2. Ist F_{n+1} eine Reduktion von F_n, so kommt man von allen Formeln F_{n+1} durch Schlüsse (S1), (S2) oder (S4) zu F_n.

7.3.3. Ist F_{n+1} eine Kontraktion von F_n, so kommt man von allen Formeln F_{n+1} durch einen Schluß (SE) zu F_n.

Also gibt es für jedes n ein F_{n+1}, das nicht streng herleitbar ist.

Die folgenden Lemmata 7.5. bis 7.9. betreffen Eigenschaften von Deduktionsfäden und bereiten das Semantische Hauptlemma in §8 vor. Sie zeigen, grob gesagt, daß in einem Deduktionsfaden ohne Axiom nach oben hin immer wieder kontrahiert, reduziert und abgeschwächt wird, wenn extensive, reduzible oder kritische Formeln auftreten.

7.4. Für den Rest von §7 sei F eine nicht streng herleitbare Formel und $\Delta(F)$ ein Deduktionsfaden von F ohne Axiom.

7.5. Lemma:

7.5.1. Ist A eine (eigentliche oder uneigentliche) Primformel und ist A oder $\neg A$ Positivteil von F_n, so ist A bzw. $\neg A$ auch Positivteil von F_{n+1}, falls F_{n+1} existiert.

7.5.2. Ist $\langle A,B\rangle$ ein extensives Paar von F_n, dann auch von F_{n+1}, falls F_{n+1} existiert.

7.5.3. Ist A ein reduzibler Teil von F_n und geht F_{n+1} nicht dadurch aus F_n hervor, daß A durch eine Reduzierte A' von A ersetzt wird, so ist A auch reduzibler Teil von F_{n+1}.

Dieses Lemma folgt unmittelbar aus der Definition eines Deduktionsfadens.

7.6. Lemma:

7.6.1. Ist F_{n+1} eine Kontraktion von F_n, dann gibt es ein $s > 0$, so daß für $0 \leq \sigma < s$ $F_{n+\sigma+1}$ eine Kontraktion von $F_{n+\sigma}$ und F_{n+s} nicht-extensiv ist.

Beweis durch Induktion nach dem Extensionalitätsgrad εF_{n+1} von F_{n+1}:

Ist $\varepsilon F_{n+1} = 0$, so erfüllt $s = 1$ die Behauptung. Ist aber $\varepsilon F_{n+1} > 0$, so ist F_{n+1} extensiv und nach 7.1.3. F_{n+2} eine Kontraktion von F_{n+1}. Nach dem Hauptlemma über Grade 6.16.2. ist $\varepsilon F_{n+2} < \varepsilon F_{n+1}$. Nach IV gibt es daher ein $s' > 0$, so daß für $0 \leq \sigma \leq s'$ $F_{(n+1)+\sigma+1}$ eine Kontraktion von $F_{(n+1)+\sigma}$ und $F_{(n+1)+s}$ nicht-extensiv ist. $s = s' + 1$ erfüllt die Behauptung.

7.6.2. Ist F_{n+1} eine Reduktion von F_n, dann gibt es ein $s > 0$, so daß für $0 \leq \sigma < s$ $F_{n+\sigma+1}$ eine Reduktion von $F_{n+\sigma}$ und F_{n+s} nicht-reduzibel ist.

Beweis durch Induktion nach dem Reduzibilitätsgrad ϱF_{n+1} von F_{n+1}, analog zu 7.6.1. unter Benützung von 6.16.1..

7.7. Lemma:

Ist $\langle A,B\rangle$ ein extensives Paar von F_n, dann gibt es ein $m \geq n$, so daß $\langle A,B\rangle$ abgesättigtes extensives Paar von F_m ist.

Beweis: Ist $\langle A,B\rangle$ in F_n abgesättigt, so erfüllt $m = n$ die Behauptung. Sei also $\langle A,B\rangle$ in F_n nicht-abgesättigt. Dann ist F_n extensiv, und im Schema 7.1.3. müssen die Felder 1, 4 und 5 betrachtet werden.

7.7.1. Feld (1), (4): F_{n+1} sei eine Kontraktion von F_n. Nach Lemma 7.6.1. ist F_{n+s} nicht-extensiv für ein $s > 0$. $\langle A,B \rangle$ ist nach Lemma 7.5.2. auch extensives Paar von F_{n+s} und in F_{n+s} abgesättigt.

7.7.2. Feld (4): F_{n+1} sei eine n-te Abschwächung von F_n. $\langle A,B \rangle$ ist nach Lemma 7.5.2. auch extensives Paar von F_{n+1}; wir befinden uns mit F_{n+1} in Feld (1). 7.7.1. zeigt, daß es ein $m > n+1$ mit der gewünschten Eigenschaft gibt; dieses m erfüllt die Behauptung.

7.7.3. Feld (5): F_{n+1} sei eine Reduktion von F_n. Nach Lemma 7.6.2. ist F_{n+s} nicht-reduzibel für ein $s > 0$. Ist jetzt F_{n+s} kritisch, so ist F_{n+s+1} eine (n+s)-te Abschwächung von F_{n+s}, andernfalls eine Kontraktion von F_{n+s}. Nach Lemma 7.5.2. ist $\langle A,B \rangle$ auch extensives Paar von F_{n+s}, und wir befinden uns mit F_{n+s} in Feld (1) oder in Feld (4). 7.7.1. und 7.7.2. zeigen, daß es jedenfalls ein $m > n+s$ mit der gewünschten Eigenschaft gibt, dieses m erfüllt die Behauptung.

7.8. <u>Lemma:</u>
Ist A reduzibler Teil von F_n, dann gibt es ein $m > n$, so daß eine Reduzierte A^* von A Positivteil von F_m ist.

Beweis: Im Schema 7.1.3. kommen nur die Felder (1), (2) und (5) in Frage, da F_n reduzibel ist.

7.8.1. Feld (1): F_n sei extensiv, F_{n+1} eine Kontraktion von F_n. Nach Lemma 7.6. gibt es ein $s > 0$, so daß für $0 \leq \sigma < s$ $F_{n+\sigma+1}$ eine Kontraktion von $F_{n+\sigma}$ und F_{n+s} nicht-extensiv ist. Nach Lemma 7.5.3. ist A auch reduzibler Teil von F_{n+s}; wir befinden uns mit F_{n+s} in Feld (2).

7.8.2. Feld (2), (5): F_{n+1} sei eine Reduktion von F_n. Nach Lemma 7.6. gibt es ein $s > 0$, so daß F_{n+s} nicht-reduzibel ist; somit kann A kein reduzibler Teil von F_{n+s} sein. Nach Lemma 7.5.3. muß A zwischen F_n und F_{n+s} einmal durch eine Reduzierte A' von A ersetzt worden sein. Es gibt also ein σ mit $0 < \sigma \leq s$, so daß A' Positivteil von $F_{n+\sigma}$ ist.

7.9. Lemma:
Ist $\bigvee x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau})$ kritischer Teil von F_k, dann gibt es zu jedem $n \geqslant k$ ein $m \geqslant n$, so daß F_{m+1} m-te Abschwächung von F_m ist.
(Insbesondere ist ein Deduktionsfaden ohne Axiom unendlich lang, wenn er eine kritische Formel enthält.)

Beweis: Nach Lemma 7.5.4. ist $\bigvee x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau})$ auch kritischer Teil von F_n. Im Schema kommen alle Felder in Frage.

7.9.1. Feld (3), Feld (6) und Feld (4):
$m = n$ erfüllt die Behauptung.

7.9.2. Feld (1): F_n sei extensiv, F_{n+1} eine Kontraktion von F_n. Nach Lemma 7.6.1. ist F_{n+s} nicht-extensiv für ein $s > 0$, und F_{n+s} ist eine Kontraktion von F_{n+s-1}. Da nach Lemma 7.5.4. $\bigvee x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau})$ auch kritischer Teil von F_{n+s} ist, befinden wir uns mit F_{n+s} in Feld (2) oder in Feld (3).

7.9.3. Feld (2), Feld (5): F_n sei reduzibel und F_{n+1} eine Reduktion von F_n. Nach Lemma 7.6.2. ist F_{n+s} nicht-reduzibel für ein $s > 0$. Da nach Lemma 7.5.4. $\bigvee x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau})$ auch kritischer Teil von F_{n+s} ist und da F_{n+s} eine Reduktion von F_{n+s-1} ist, erfüllt $m = n+s$ die Behauptung.

§8. Semiwertungen, totale Wertungen und das Semantische Hauptlemma

8.1. Definition:

Eine Semiwertung ist eine Zuordnung V von höchstens einem Wahrheitswert VF aus $\{w,f\}$ zu jeder Formel F, die folgenden Bedingungen genügt:

8.1.1. Ist $V(\neg A) = w$, so ist $VA = f$.
8.1.2. Ist $V(\neg A) = f$, so ist $VA = w$.

8.1.3. Ist $V(A \vee B) = w$, so ist $VA = w$ oder $VB = w$.
8.1.4. Ist $V(A \vee B) = f$, so ist $VA = f$ und $VB = f$.

8.1.5. Ist $V\forall x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau}) = w$, so gibt es einen Ausdruck r^{τ} mit $V\mathfrak{A}(r^{\tau}) = w$. [1]

8.1.6. Ist $V\forall x^{\tau}\mathfrak{A}(x^{\tau}) = f$, so ist $V\mathfrak{A}(r^{\tau}) = f$ für alle Ausdrücke r^{τ}.

8.1.7. Ist $V(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n})) = w$, so ist $V\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n}) = w$.

8.1.8. Ist $V(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n})) = f$, so ist $V\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n}) = f$.

8.1.9. Ist
$\langle (r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\ldots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)})\rangle$
ein extensives Paar und ist $V(r \in a) \neq V(s \in a)$, so gibt es ein Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ von $\langle (r\in a),(s\in a)\rangle$ mit $Vr_i \neq Vs_i$.

8.1.10. Bemerkung:
Die letzte Bedingung 8.1.9. heißt Extensionalitätsbedingung.[2]

---

[1] Takahashi fordert in [7] sogar die Existenz einer freien Variablen a^{τ} mit $V\mathfrak{A}(a^{\tau}) = w$.

[2] Die Extensionalitätsbedingung ist von Takahashi in [8] für den Sequenzenkalkül GLC mit Extensionalität formuliert worden.

8.2. Definition:
Eine totale Wertung ist eine Zuordnung W von genau einem Wahrheitswert WF aus $\{w,f\}$ zu jeder Formel F, die den Bedingungen 8.1.1. bis 8.1.9. genügt.

8.3. Semantisches Hauptlemma:
Ist die Formel F nicht streng herleitbar, so gibt es eine Semiwertung V mit VF = f.

Beweis: Nach Satz 7.3. gibt es zu jeder nicht streng herleitbaren Formel F einen Deduktionsfaden $\triangle(F) = F, F_1, F_2, \ldots$ ohne Axiom. Eine Semiwertung V kann mit Hilfe von $\triangle(F)$ folgendermaßen definiert werden:

8.3.1.
$$VA := \begin{cases} w, & \text{wenn } \neg A \text{ als Positivteil in } \triangle(F) \text{ auftritt,} \\ f, & \text{wenn } A \text{ als Positivteil in } \triangle(F) \text{ auftritt.} \end{cases}$$
Tritt weder A noch $\neg A$ als Positivteil in $\triangle(F)$ auf, so sei VA nicht definiert.

8.3.2. Nachweis der Bedingungen 8.1.1. bis 8.1.9. für V:

8.3.2.1. Ist $V(\neg A) = w$, so ist $\neg\neg A$ Positivteil (PT) in $\triangle(F)$. Dann ist aber auch A PT in $\triangle(F)$ und somit VA = f.

8.3.2.2. Ist $V(\neg A) = f$, so ist $\neg A$ PT in $\triangle(F)$ und VA = w.

8.3.2.3. Ist $V(A \vee B) = w$, so ist $\neg(A \vee B)$ PT in $\triangle(F)$, etwa in F_n. Nach Lemma 7.8. gibt es ein $m > n$, so daß $\neg A$ oder $\neg B$ PT in F_m ist. Damit ist VA = w oder VB = w.

8.3.2.4. Ist $V(A \vee B) = f$, also $(A \vee B)$ PT in $\triangle(F)$, so sind A und B Positivteile in $\triangle(F)$, und es ist VA = VB = f.

8.3.2.5. Ist $V \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = w$, so ist $\neg \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)$ PT in $\triangle(F)$, etwa in F_n. Nach Lemma 7.8. gibt es ein $m > n$ und eine freie Variable a^τ, so daß $\neg \mathfrak{A}(a^\tau)$ PT in $\triangle(F)$ ist. Damit ist $V \mathfrak{A}(a^\tau) = w$.

8.3.2.6. Ist $V \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = f$, so ist $\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)$ PT in $\triangle(F)$, etwa in F_k. Nach Lemma 7.9. gibt es für jedes n $(n \geqslant k)$ ein $m \geqslant n$, so daß F_{m+1} m-te Abschwächung von F_m ist. Nach Lemma 7.5. ist $\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)$ auch Positivteil in F_m. F_{m+1} enthält also insbesodere alle Formeln $\mathfrak{A}(r_i^\tau)$ mit $1 \leqslant i \leqslant n$ als Adjunktionsglieder, d.h. als Positivteile. Da dies für alle $n \geqslant k$ gilt, ist $V \mathfrak{A}(r_n^\tau) = f$ für alle n.

8.3.2.7. Ist $V(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n})) = w$, so ist $\neg(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}))$ PT in $\triangle(F)$, etwa in F_n. Nach Lemma 7.8. gibt es ein $m > n$, so daß $\neg\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n})$ PT in F_m ist. Also ist $V\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n}) \neq w$.

8.3.2.8. Ist $V(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n}\,\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n})) = f$, so erhält man ebenso $V\mathfrak{A}(r_1 1,\dots,r_n n) = f$.

8.3.2.9. Ist
$\langle (r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\dots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)})\rangle$
ein extensives Paar und etwa $V(r \in a) = w$, $V(s \in a) = f$, so sind $\neg(r \in a)$ und $(s \in a)$ Positivteile in $\triangle(F)$, etwa in F_i und F_k. Nach Lemma 7.5. ist $\langle (r\ \ a),(s\ \ a)\rangle$ extensives Paar von F_n für $n = \max(i,k)$. Nach Lemma 7.7. gibt es ein $m \geqslant n$, so daß $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ abgesättigtes extensives Paar von F_m ist. F_m hat also die Gestalt $\mathfrak{P}^2[\neg\tilde{r}_i,\tilde{s}_i]$ oder $\mathfrak{P}^2[\neg\tilde{s}_i,\tilde{r}_i]$, wobei $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ ein Kontraktionspaar von $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ ist. Damit ist jedenfalls $V\tilde{r}_i \neq V\tilde{s}_i$.

8.3.3. V ordnet jeder Formel A höchstens einen Wahrheitswert zu.
Beweis durch Induktion nach dem Grad von A.

8.3.3.1. Sei A eine eigentliche Primformel. Hätte A in V die Werte f und w zugleich, so gäbe es F_i, F_k in $\triangle(F)$ mit A PT in F_i, $\neg A$ PT in F_k. Mit Lemma 7.5.1. wären A und $\neg A$ Positivteile in F_n mit $n = \max(i,k)$, d.h. F_n wäre Axiom.

8.3.3.2. Ist A keine eigentliche Primformel (γA ist dann > 0) und hat A die Werte w und f zugleich in V, so gibt es nach 8.1.1. bis 8.1.9. und 8.3.2. eine Formel B mit $\gamma B < \gamma A$, die ebenfalls in V die Werte w und f zugleich hat. Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

KAPITEL III: SCHNITTELIMINIERBARKEIT

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des Satzes von Takahashi in § 13, aus dem zusammen mit dem Semantischen Hauptlemma aus § 8 die Schnitteliminierbarkeit folgt: Jede herleitbare Formel ist streng herleitbar.

Die Begriffsbildungen lehnen sich zunächst an Takahashi [7] an, folgen dann einer von Schütte stammenden vereinfachenden Modifikation [5] und nähern sich damit den Ausführungen von Prawitz [2].
An allen Stellen, die die Extensionalität betreffen, bestehen Abweichungen von den eben genannten Arbeiten. Das ist besonders bei der Definition der V-Korrespondenz in 11.3. und beim Nachweis der Extensionalitätseigenschaft 8.1.9. für Φ_2 in 11.1. der Fall.

V sei eine Semiwertung nach 8.1., die für die §§ 9,10,11 fest bleibt.

§ 9. V-Komplexe

Das Zeichen ε stehe im folgenden für die metasprachliche Element-Relation. Eine Verwechslung mit dem Zeichen für den Extensionalitätsgrad einer Formel (aus § 6) ist nicht möglich, da dieser nicht mehr gebraucht wird. Das Zeichen $\in$ ist als Grundzeichen des formalen Systems bereits verbraucht.

9.1. Induktive Definition der Menge K^{τ} der V-Komplexe vom Typ τ.[1)]

9.1.1. $[r^{o},0] \varepsilon K^{o}$.

9.1.2. Ist $Vr^{1} = w$ oder nicht definiert, so ist $[r^{1},w] \varepsilon K^{1}$.
Ist $Vr^{1} = f$ oder nicht definiert, so ist $[r^{1},f] \varepsilon K^{1}$.

---

1) Ist $[r^{\tau},p^{\tau}]$ ein V-Komplex, so ist p^{τ} "ein möglicher Wert von r^{τ}" in der Terminologie von Prawitz [2].

9.1.3. Für $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ gilt:
Ist p^τ eine Teilmenge von $K^{\tau_1} \times \dots \times K^{\tau_n}$ mit der Eigenschaft:

$$\left.\begin{array}{l} V(r_1^{\tau_1}, \dots, r_n^{\tau_n} \in r^\tau) = \begin{cases} w \\ f \end{cases} \\ c_i^{\tau_i} = [r_i^{\tau_i}, p_i^{\tau_i}] \in K^{\tau_i} \quad (i=1,\dots,n) \end{array}\right\rangle \langle c_1^{\tau_1}, \dots, c_n^{\tau_n} \rangle \begin{array}{c} \in \\ \notin \end{array} p ,$$

so ist $[r^\tau, p^\tau] \in K^\tau$.

9.2. <u>Bezeichnung:</u> $\overline{[r^\tau, p^\tau]}$ sei ein eindeutig bestimmter Name für den V-Komplex $[r^\tau, p^\tau] \in K^\tau$. Er kann nur bedingt als neue Konstante aufgefaßt werden.[1)]

9.3. <u>Definition:</u> Ein <u>V-Ausdruck vom Typ τ</u> unterscheidet sich von einem Ausdruck vom Typ τ dadurch, daß anstelle freier Variabler von Typen $\neq 0$ Namen von V-Komplexen gleicher Typen auftreten dürfen. Ebenso unterscheiden sich <u>V-Formeln</u> von Formeln.

9.4. <u>Bezeichnung:</u>

r^τ, s^τ, t^τ	für V-Ausdrücke vom Typ τ,
a^τ, b^τ, c^τ	für freie Variable und Namen von V-Komplexen vom Typ τ.

9.5. <u>Definition:</u> V-Ausdrücke (V-Formeln), in denen keine Namen von V-Komplexen auftreten, heißen <u>echte Ausdrücke</u> (<u>echte Formeln</u>).

9.6. <u>Definition:</u> Der <u>Grad γr^τ eines V-Ausdrucks r^τ</u> bestimmt sich nach ?.1., wobei Namen von V-Komplexen wie freie Variable gleicher Typen behandelt werden.

9.7. <u>Definition:</u> Die <u>Länge lr^τ eines V-Ausdrucks r^τ</u> sei die Anzahl der in r^τ auftretenden (nicht überstrichenen) logischen Zeichen. Variable und Namen von V-Komplexen haben die Länge 0.

9.8. <u>Definition von $\Phi_1 r$ für jeden V-Ausdruck r^τ vom Typ τ:</u> $\Phi_1 r^\tau$ gehe aus r^τ dadurch hervor, daß jeder in r^τ vorkommende Name $\overline{[s^\sigma, p^\sigma]}$ eines V-Komplexes durch s^σ ersetzt wird.

---

1) vgl. §§10,15, sowie [2], 3.3..

Folgerungen:

9.8.1. Diese Definition hat auch für Teile von V-Ausdrücken Sinn, so ist etwa $\Phi_1 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = \bigvee x^\tau \Phi_1 \mathfrak{A}(x^\tau)$.

9.8.2. Für jeden V-Ausdruck r^τ vom Typ τ ist $\Phi_1 r^\tau$ ein echter Ausdruck vom Typ τ.

9.8.3. Ist $C^\tau = [r^\tau, p^\tau]$ ein V-Komplex aus K^τ und $\mathfrak{A}(r^\tau)$ ein V-Ausdruck, so ist $\Phi_1 \mathfrak{A}(\bar{C}^\tau) = \Phi_1 \mathfrak{A}(r^\tau)$.

§ 10. Klassifikation von V-Formeln. Erweiterung des Herleitbarkeitsbegriffs.

Man kann die Namen der V-Komplexe als eine Art neuer Konstanten betrachten; damit erhält man eine zu §1 analoge Klassifikation der V-Formeln. Zur Unterscheidung sollen die entsprechenden Begriffe jetzt mit dem Präfix "V-" versehen werden.
Man beachte die Art der Einteilung der V-Primformeln in V-eigentliche und V-uneigentliche Primformeln!

10.1. V-Primformeln sind:

10.1.1. alle freien Variablen und Namen von V-Komplexen vom Typ 1;

10.1.2. alle V-Formeln der Gestalt $(r_1^\tau, \ldots, r_n^\tau \in a^\tau)$, wenn a^τ eine freie Variable oder der Name eines V-Komplexes vom Typ $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ist.

10.2. V-uneigentliche Primformeln sind alle V-Formeln der Gestalt $(r_1^\tau, \ldots, r_n^\tau \in a^\tau)$, wobei a^τ eine freie Variable vom Typ $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \neq (0, \ldots, 0)$ ist. (Würden die Namen der V-Komplexe gänzlich wie Konstanten behandelt, so müßte man an dieser Stelle für a^τ auch den Namen eines V-Komplexes zulassen; vgl. Fußnote 2 auf S.4. Dann würden aber die Folgerungen 10.3. bis 10.5. hinfällig.)

10.2.1. Alle übrigen V-Primformeln heißen V-eigentliche Primformeln.

Alle übrigen Klassifikationen aus §1 können unverändert auf V-Formeln übertragen werden.

Einfache Folgerungen für V-extensive Paare und ihre V-Kontraktionspaare:

10.3. Ist $\langle (r_1^{\tau}1,\dots,r_n^{\tau}n \in a^{\tau}),(s_1^{\tau}1,\dots,s_n^{\tau}n \in a^{\tau})\rangle$ ein V-extensives Paar, so ist $\langle \Phi_1(r \in a), \Phi_1(s \in a)\rangle$ ein extensives Paar nach 1.18..

10.4. Ist $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ ein V-Kontraktionspaar des V-extensiven Paares $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$, so ist $\langle \Phi_1\tilde{r}_i, \Phi_1\tilde{s}_i\rangle$ ein Kontraktionspaar des extensiven Paares $\langle \Phi_1(r \in a), \Phi_1(s \in a)\rangle$ nach 1.19..

10.5. Ist $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ ein V-extensives Paar und ist $\langle \tilde{r}_i^!,\tilde{s}_i^!\rangle$ ein Kontraktionspaar des extensiven Paares $\langle \Phi_1(r \in a), \Phi_1(s \in a)\rangle$, so gibt es ein V-Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ von $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$ mit $\Phi_1\tilde{r}_i = \tilde{r}_i^!$ und $\Phi_1\tilde{s}_i = \tilde{s}_i^!$.

10.6. Ist $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ ein V-Kontraktionspaar des V-extensiven Paares $\langle (r \in a),(s \in a)\rangle$, so ist $l\tilde{r}_i \leq l(r \in a)$ und $\gamma\tilde{r}_i < \gamma(r \in a)$. Beweis wie unter 3.3..

10.7. Ausdehnung des Herleitbarkeitsbegriffs auf V-Formeln:

10.7.1. Die Definitionen der V-Axiome und der V-Grundschlußregeln gehen aus den Definitionen der Axiome und der Grundschlußregeln in §2 dadurch hervor, daß alle Klassifikationsbegriffe mit dem Präfix "V-" versehen werden.
Die Eigenvariablen der V-Grundschlüsse (S2) und (SE) müssen freie Variable sein.

10.7.2. Die Sätze aus §4 gelten sinngemäß auch für V-Formeln. Insbesondere können die in den Konklusionen der Substitutionssätze 4.6. und 4.7. auftretenden Ausdrücke b^{τ} bzw. $b_1^{\tau}1,\dots,b_n^{\tau}n$ jetzt Namen von V-Komplexen sein. (Man beachte, daß mit $\mathfrak{A}(a^{\tau})$ auch $\mathfrak{A}(\bar{C}^{\tau})$ ein V-Axiom ist!)

10.7.3. Wenn F ein V-Axiom ist, dann ist die Formel $\Phi_1 F$ nach Satz 3.8. herleitbar. $\Phi_1 F$ braucht kein Axiom zu sein.

10.7.4. Ist $F_1,\dots,F_n \Longrightarrow F$ ein V-Grundschluß, so ist $\Phi_1 F_1,\dots,\Phi_1 F_n \Longrightarrow \Phi_1 F$ ein entsprechender Grundschluß.

10.7.5. Die Namen der V-Komplexe werden nicht generell wie Konstanten behandelt!

§ 11. Die V-Korrespondenz Φ

11.1. Definition: Eine V-Korrespondenz ist eine Abbildung Φ, die jedem V-Ausdruck r^τ einen V-Komplex $\Phi r^\tau = [\Phi_1 r^\tau, \Phi_2 r^\tau] \varepsilon K^\tau$ zuordnet.

11.2. Definition: Für jeden V-Ausdruck r^τ sei αr^τ die Ordinalzahl $\omega \cdot l r^\tau + \gamma r^\tau$.

11.3. Induktive Definition von Φr^τ für jeden V-Ausdruck r^τ (induktiv nach αr^τ):

11.3.1. $\Phi_1 r^\tau$ ist durch 9.8. gegeben.

11.3.2. Für freie Variable a^τ sei $\Phi_2 a^\tau$ definiert durch:

$\Phi_2 a^0 := 0;$

$\Phi_2 a^1 :=$ w, wenn $Va^1 = w$,
f sonst;

$$\Phi_2 a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)} := \{\langle C_1^{\tau_1},\dots,C_n^{\tau_n}\rangle : C_i^{\tau_i} = [r_i^{\tau_i}, p_i^{\tau_i}] \varepsilon K^{\tau_i} \text{ für } i=1,\dots,n;\ V(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)}) = w\}.$$

11.3.3. Ist $C^\tau = [r^\tau, p^\tau] \varepsilon K^\tau$, so sei $\Phi_2 \bar{C}^{\bar\tau} := p^\tau$.
Es ist dann mit 9.8. $\Phi \bar{C}^{\bar\tau} = C^\tau$ für jeden V-Komplex $C^\tau \varepsilon K^\tau$.

11.3.4.

$$\Phi_2(\neg A) := \begin{cases} w, & \text{wenn } \Phi_2 A = f, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

11.3.5.

$$\Phi_2(A \vee B) := \begin{cases} w, & \text{wenn } \Phi_2 A = w \text{ oder } \Phi_2 B = w, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

11.3.6.

$$\Phi_2 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) := \begin{cases} w, & \text{wenn es } C^\tau \varepsilon K^\tau \text{ gibt mit } \Phi_2 \mathfrak{A}(\bar{C}^{\bar\tau}) = w, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

11.3.7.

$$\Phi_2 \lambda x_1^{\tau_1}\dots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\dots,x_n^{\tau_n}) :=$$
$$\{\langle C_1^{\tau_1},\dots,C_n^{\tau_n}\rangle : C_i^{\tau_i} \varepsilon K^{\tau_i} \text{ für } i=1,\dots,n, \Phi_2 \mathfrak{A}(\bar{C}_1^{\bar\tau_1},\dots,\bar{C}_n^{\bar\tau_n}) = w\}.$$

11.3.8.

Ist die V-Formel $F := (r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in s^\tau)$ keine V-uneigentliche Primformel, so sei

$$\Phi_2 F := \begin{cases} w, & \text{wenn } \langle \Phi r_1,\dots,\Phi r_n \rangle \varepsilon \Phi_2 s^\tau, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

11.3.9. Ist $(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n}\in a^{\tau})$ eine V-uneigentliche Primformel, so sei $\Phi_2(r\in a)$ wie folgt definiert:

11.3.9.1. Ist $V\Phi_1(r\in a)$ definiert, so sei $\Phi_2(r\in a) := V\Phi_1(r\in a)$.

11.3.9.2. Ist $V\Phi_1(r\in a)$ nicht definiert, so sei $\Phi_2(r\in a) := w$, wenn gilt:

11.3.9.2.1. Für jedes V-extensive Paar $\langle (r\in a),(s\in a)\rangle$ mit $\alpha(s\in a) < \alpha(r\in a)$ und $\Phi_2(s\in a) = f$ gibt es ein V-Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ von $\langle (r\in a),(s\in a)\rangle$ mit $\Phi_2\tilde{r}_i = \Phi_2\tilde{s}_i$. (In diesem Fall ist $\Phi_2\tilde{r}_i$ und $\Phi_2\tilde{s}_i$ für jedes V-Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ von $\langle (r\in a),(s\in a)\rangle$ definiert, da nach 10.6. $\alpha\tilde{r}_i < \alpha(r\in a)$ und $\alpha s_i < \alpha(s\in a) < \alpha(r\in a)$ ist.)

11.3.9.2.2. Für jedes V-extensive Paar $\langle (r\in a),(s\in a)\rangle$ mit $\alpha(s\in a) \geqslant \alpha(r\in a)$ und $V\Phi_1(s\in a) = f$ gibt es ein V-Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i,\tilde{s}_i\rangle$ von $\langle (r\in a),(s\in a)\rangle$ mit $\Phi_2\tilde{s}_i = \Phi_2\tilde{r}_i$ oder $V\Phi_1 s_i = \Phi_2 r_i$. (Diese Bedingungen sind für $\tilde{s}_i$ im Existenzsinn zu verstehen; $\Phi_2\tilde{r}_i$ ist nach 10.6. jedenfalls definiert.)

Andernfalls sei $\Phi_2(r\in a) := f$.

11.4. <u>Lemma:</u> Φ ist eine V-Korrespondenz; d.h. für jeden V-Ausdruck r^{τ} ist $\Phi r^{\tau} = [\Phi_1 r^{\tau},\Phi_2 r^{\tau}] \varepsilon K^{\tau}$.[1]
Beweis durch Induktion nach lr^{τ}.

11.4.1. Zunächst ist $\Phi_1 r^{\tau}$ nach 9.8.2. ein echter Ausdruck.

11.4.2. Für jede freie Variable a^{τ} ist $\Phi a^{\tau} \varepsilon K^{\tau}$ nach 9.1. und 11.3.2..

11.4.3. Für jeden V-Komplex C^{τ} ist $\Phi_2\bar{C}^{\tau} = C^{\tau} \varepsilon K^{\tau}$.

11.4.4. Für $F = \neg A$ gilt: Ist $V\Phi_1(\neg A) = w(f)$, so ist nach 8.1.1. $V\Phi_1 A = f(w)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\Phi_2 A = f(w)$, und 11.3.4. liefert $\Phi_2(\neg A) = w(f)$.

---

[1] Dieses Lemma entspricht dem Lemma 2.3.3. bei Takahashi [7].

11.4.5. Für $F = A \vee B$ gilt: Ist $V\Phi_1(A \vee B) = V(\Phi_1 A \vee \Phi_1 B) = w$, so ist nach 8.1.3. $V\Phi_1 A = w$ oder $V\Phi_1 B = w$. Nach IV ist dann $\Phi_2 A = w$ oder $\Phi_2 B = w$, und 11.3.5. liefert $\Phi_2(A \vee B) = w$. Ebenso schließt man mit 8.1.4. von $V\Phi_1(A \vee B) = f$ auf $\Phi_2(A \vee B) = f$.

11.4.6. Für $F = \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)$ gilt: Ist $V\Phi_1 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = V\bigvee x^\tau \Phi_1 \mathfrak{A}(x^\tau) = w$ (vgl. 9.8.1.), so gibt es nach 8.1.5. einen echten Ausdruck r_o^τ mit $V\Phi_1 \mathfrak{A}(r_o^\tau) = w$. Wäre nun $\Phi_2 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = f$, so wäre $\Phi_2 \mathfrak{A}(\overline{C^\tau}) = f$ für jedes $C^\tau \varepsilon K^\tau$, insbesondere für jeden V-Komplex $C_o^\tau = [r_o^\tau, p_o^\tau]$. (Daß es zu jedem echten Ausdruck r_o^τ einen V-Komplex $C_o^\tau = [r_o^\tau, p_o^\tau] \varepsilon K^\tau$ gibt, beweist man durch Konstruktion von p_o^τ ähnlich wie unter 11.2.2.) Es wäre $\Phi_1 \mathfrak{A}(\overline{C_o^\tau}) = \Phi_1 \mathfrak{A}(r_o^\tau)$ nach 9.8.3. und damit $V\Phi_1 \mathfrak{A}(\overline{C_o^\tau}) = w$. Mit der Induktionsvoraussetztung ergäbe sich zu 11.3.6. der Widerspruch $\Phi_2 \mathfrak{A}(\overline{C_o^\tau}) = w$. Ist andererseits $V\Phi_1 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = V\bigvee x^\tau \Phi_1 \mathfrak{A}(x^\tau) = f$, so ist nach 8.1.6. $V\Phi_1 \mathfrak{A}(r^\tau) = f$ für alle echten Ausdrücke r^τ. Wäre nun $\Phi_2 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = w$, so gäbe es nach 11.3.6. einen V-Komplex $C^\tau = [r^\tau, p^\tau] \varepsilon K^\tau$ mit $\Phi_2 \mathfrak{A}(\overline{C^\tau}) = w$. Es wäre $\Phi_1 \mathfrak{A}(\overline{C^\tau}) = \Phi_1 \mathfrak{A}(r^\tau)$ nach 9.8.3. und damit $V\Phi_1 \mathfrak{A}(\overline{C^\tau}) = f$. Mit der IV hätte man den Widerspruch $\Phi_2 \mathfrak{A}(\overline{C^\tau}) = f$.

11.4.7. Für $r = \lambda x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}(x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n})$ ist $\Phi_2 r^\tau$ nach 11.3.7. eine Teilmenge von $K^{\tau_1} \times \ldots \times K^{\tau_n}$. Sei nun $V(r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in \Phi_1 r^\tau) = w$ und $C_i^{\tau_i} = [r_i^{\tau_i}, p_i^{\tau_i}] \varepsilon K^{\tau_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Es ist $V(r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in \Phi_1 r\ ) =$

$V(r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} \Phi_1 \mathfrak{A}(x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}))$ (vgl. 9.8.1.)

$= V\Phi_1 \mathfrak{A}(r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n})$ nach 8.1.7. und 8.1.8., und

$= V\Phi_1 \mathfrak{A}(\overline{C_1^{\tau_1}}, \ldots, \overline{C_n^{\tau_n}})$ nach 9.8.3.. Da aber $\mathfrak{A}(\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_n})$ kürzer ist als r^τ, folgt $\Phi_2 \mathfrak{A}(\overline{C_1^{\tau_1}}, \ldots, \overline{C_n^{\tau_n}}) = w$ nach IV, und damit $\langle C_1^{\tau_1}, \ldots, C_n^{\tau_n} \rangle \varepsilon \Phi_2 r^\tau$ nach 11.3.7.. Im Fall $V(r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in \Phi_1 r^\tau) = f$ schließt man ebenso, daß $\langle C_1^{\tau_1}, \ldots, C_n^{\tau_n} \rangle \notin \Phi_2 r^\tau$. Also ist Φr^τ ein V-Komplex aus K^τ.

11.4.8. Ist die V-Formel $F = (r_1^{\tau_1}, \ldots, r_n^{\tau_n} \in s^\tau)$ keine V-uneigentliche Primformel, so sind nach IV $\Phi r_1^{\tau_1}, \ldots, \Phi r_n^{\tau_n}$ und Φs^τ V-Komplexe. Ist also $V\Phi_1 F = V(\Phi_1 r_1 1, \ldots, \Phi_1 r_n n \in \Phi_1 s^\tau) = w$, so ist nach 9.1.3. $\langle \Phi r_1^{\tau_1}, \ldots, \Phi r_n^{\tau_n} \rangle \varepsilon \Phi_2 s$, d.h. $\Phi_2 F = w$ nach 11.3.8.. Ebenso schließt man von $V\Phi_1 F = f$

auf $\Phi_2 F = f$.

11.4.9. Ist $(r_1^\tau 1, \ldots, r_n^\tau n \in a^\tau)$ eine V-uneigentliche Primformel und $V\Phi_1(r \in a)$ definiert, so ist $\Phi_2(r \in a) = V\Phi_1(r \in a)$ nach 11.3.9.1..

Damit ist das Lemma bewiesen.

§ 12. Eigenschaften der V-Korrespondenz Φ

In den Lemmata 12.1. und 12.2. werden wichtige Eigenschaften von Φ nachgewiesen. Lemma 12.1. betrifft die Extensionalitätseigenschaft, wie sie für V durch 8.1.9. gegeben ist. Das Hauptlemma 12.10. leistet die Vorarbeit für den Satz von Takahashi in § 13.

12.1. Lemma:
Ist $\langle (r_1^\tau 1, \ldots, r_n^\tau n \in a^\tau), (s_1^\tau 1, \ldots, s_n^\tau n \in a^\tau) \rangle$ ein V-extensives Paar mit $\Phi_2(r \in a) \neq \Phi_2(s \in a)$, so gibt es ein V-Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i, \tilde{s}_i \rangle$ von $\langle (r \in a), (s \in a) \rangle$ mit $\Phi_2 \tilde{r}_i \neq \Phi_2 \tilde{s}_i$.

Beweis durch Induktion nach der natürlichen Summe[1] $\alpha(r \in a) \# \alpha(s \in a)$ (vgl. 11.2.):
Ohne Einschränkung sei $\Phi_2(r \in a) = w$, $\Phi_2(s \in a) = f$.[1]
Es werden drei Hauptfälle unterschieden:
a) $V\Phi_1(r \in a)$ und $V\Phi_1(s \in a)$ sind definiert.
b) $V\Phi_1(r \in a)$ ist nicht definiert, wohl aber $V\Phi_1(s \in a)$.
c) $V\Phi_1(s \in a)$ ist nicht definiert.

12.1.1. Fall a): Sei $V\Phi_1(r \in a) = w$, $V\Phi_1(s \in a) = f$. Andere Werte sind wegen Lemma 11.4. nicht möglich. Nach 10.3. ist $\langle \Phi_1(r \in a), \Phi_1(s \in a) \rangle$ ein extensives Paar, zu dem es nach 8.1.9. ein Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i^{\prime}, \tilde{s}_i^{\prime} \rangle$ mit $V\tilde{r}_i^{\prime} \neq V\tilde{s}_i^{\prime}$ gibt. Nach 10.5. gibt es aber dazu ein V-Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i, \tilde{s}_i \rangle$ von $\langle (r \in a), (s \in a) \rangle$ mit $\Phi_1 \tilde{r}_i = \tilde{r}_i^{\prime}$, $\Phi_1 \tilde{s}_i = \tilde{s}_i^{\prime}$. Es ist also $V\Phi_1 \tilde{r}_i \neq V\Phi_1 \tilde{s}_i$, und nach Lemma 11.4. somit $\Phi_2 \tilde{r}_i = \Phi_2 \tilde{s}_i$.

---

[1] Die natürliche Summe von Ordinalzahlen ist kommutativ.

12.1.2. <u>Fall b):</u> Sei $V\Phi_1(r\in a)$ nicht definiert, $V\Phi_1(s\in a) = f$. Ist dann $\alpha(s\in a) < \alpha(r\in a)$, so ist die Behauptung nach Definition von $\Phi_2(r\in a)$ wegen 11.3.9.2.1. erfüllt; ist $\alpha(s\in a) \geqslant \alpha(r\in a)$, so gilt sie nach 11.3.9.2.2..

12.1.3. <u>Fall c):</u> Sei $V\Phi_1(s\in a)$ nicht definiert. Dann können nach 11.3.9.2. zwei Fälle eintreten (es war $\Phi_2(s\in a) = f$ vorausgesetzt):

12.1.3.1. Es gibt ein V-extensives Paar $\langle(s\in a), (t\in a)\rangle$ mit $\alpha(t\in a) < \alpha(s\in a)$ und $\Phi_2(t\in a) = f$, so daß für alle V-Kontraktionspaare $\langle\widetilde{s}_i,\widetilde{t}_i\rangle$ von $\langle(s\in a),(t\in a)\rangle$ gilt: $\Phi_2\widetilde{s}_i = \Phi_2 t_i$. Es ist dann $\alpha(r\in a)\#\alpha(t\in a) < \alpha(r\in a)\#\alpha(s\in a)$ und $\langle(r\in a),(t\in a)\rangle$ ein V-extensives Paar mit $\Phi_2(r\in a) \neq \Phi_2(t\in a)$. Nach IV gibt es also ein V-Kontraktionspaar $\langle\widetilde{r}_i,\widetilde{t}_i\rangle$ von $\langle(r\in a),(t\in a)\rangle$ mit $\Phi_2\widetilde{r}_i \neq \Phi_2\widetilde{t}_i$. Zu $\widetilde{t}_i$ gibt es aber ein V-Kontraktionspaar $\langle\widetilde{s}_i,\widetilde{t}_i\rangle$ von $\langle(s\in a),(t\in a)\rangle$, für das $\Phi_2 t_i = \Phi_2 s_i$ ist. Also ist $\Phi_2\widetilde{r}_i \neq \Phi_2\widetilde{s}_i$.

12.1.3.2. Es gibt ein V-extensives Paar $\langle(s\in a),(t\in a)\rangle$ mit $\alpha(t\in a) \geqslant \alpha(s\in a)$ und $V\Phi_1(t\in a) = f$, so daß für jedes V-Kontraktionspaar $\langle\widetilde{s}_i,\widetilde{t}_i\rangle$ von $\langle(s\in a),(t\in a)\rangle$ gilt: Ist $V\Phi_1\widetilde{t}_i$ definiert, so ist $V\Phi_1\widetilde{t}_i = \Phi_2\widetilde{s}_i$, und ist $\Phi_2\widetilde{t}_i$ definiert, so ist $\Phi_2\widetilde{t}_i = \Phi_2\widetilde{s}_i$.

12.1.3.2.1. Ist jetzt $V\Phi_1(r\in a)$ definiert, so ist $V\Phi_1(r\in a) \neq V\Phi_1(t\in a)$, und es gibt ein Kontraktionspaar $\langle\widetilde{r}_i',\widetilde{t}_i'\rangle$ des extensiven Paares $\langle\Phi_1(r\in a),\Phi_1(s\in a)\rangle$ mit $V\widetilde{r}_i' \neq V\widetilde{t}_i'$ wegen 8.1.9.. Nach 10.5. gibt es dazu ein V-Kontraktionspaar $\langle\widetilde{r}_i,\widetilde{t}_i\rangle$ von $\langle(r\in a),(t\in a)\rangle$ mit $\Phi_1\widetilde{r}_i = \widetilde{r}_i'$, $\Phi_1\widetilde{t}_i = \widetilde{t}_i'$. Es ist dann $V\Phi_1\widetilde{r}_i \neq V\Phi_1\widetilde{t}_i$. Mit Lemma 11.4. und den unter 12.1.3.2. beschriebenen Eigenschaften von $(t\in a)$ folgt $\Phi_2\widetilde{r}_i \neq \Phi_2 s_i$.

12.1.3.2.2. Ist aber $V\Phi_1(r\in a)$ nicht definiert, so gibt es nach Definition von $\Phi_2(r\in a)$ unter 11.3.9.2.1.(wenn $\alpha(t\in a) < \alpha(r\in a)$ ist) bzw. unter 11.3.9.2.2.(wenn $\alpha(t\in a) \geqslant \alpha(r\in a)$ ist) ein V-Kontraktionspaar $\langle\widetilde{r}_i,\widetilde{t}_i\rangle$ des V-extensiven Paares $\langle(r\in a),(t\in a)\rangle$ mit $\Phi_2\widetilde{r}_i \neq \Phi_2\widetilde{t}_i$ oder

$\Phi_2\widetilde{r}_i \neq V\Phi_1\widetilde{t}_i$. Nach den unter 12.1.3.2. beschriebenen Eigenschaften von $(t \in a)$ ist damit $\Phi_2\widetilde{r}_i \neq \Phi_2\widetilde{s}_i$.

12.2. Lemma:[1]
Für V-Ausdrücke r^τ und $\mathfrak{A}(r^\tau)$ ist $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) = \Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r})$.
Beweis durch Induktion nach $\propto\mathfrak{A}(r^\tau)$ (vgl. 11.2.):

12.2.1. Es ist $\Phi_1\mathfrak{A}(r^\tau) = \Phi_1\mathfrak{A}(\overline{\Phi r})$ nach 9.8.3..

12.2.2. Für $\mathfrak{A}(r^\tau) = r^\tau$ gilt:
$\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r}) = \Phi_2\overline{\Phi r^\tau} = \Phi_2 r^\tau$ nach 11.3.3.,
$= \Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau)$.

12.2.3. Für $\mathfrak{A}(r^\tau) = \neg\mathfrak{B}(r^\tau)$ gilt:
$\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})$ ist nach 11.3.4. genau dann w, wenn $\Phi_2\mathfrak{B}(\overline{\Phi r}) = f$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist dies genau dann der Fall, wenn $\Phi_2\mathfrak{B}(r^\tau) = f$, d.h. wenn $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) = w$.

12.2.4. Für $\mathfrak{A}(r^\tau) = \mathfrak{A}_1(r^\tau) \vee \mathfrak{A}_2(r^\tau)$ gilt:
$\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})$ ist genau dann w, wenn $\Phi_2\mathfrak{A}_1(\overline{\Phi r^\tau}) = \Phi_2\mathfrak{A}_2(\overline{\Phi r^\tau}) = w$. Nach IV ist dies genau dann der Fall, wenn $\Phi_2\mathfrak{A}_1(r^\tau) = \Phi_2\mathfrak{A}_2(r^\tau) = w$, d.h. wenn $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) = w$.

12.2.5. Für $\mathfrak{A}(r^\tau) = Vx^\sigma\mathfrak{B}(x^\sigma, r^\tau)$ gilt:
$\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})$ ist nach 11.3.6. genau dann w, wenn es einen V-Komplex $C^\sigma \varepsilon K^\sigma$ gibt mit $\Phi_2\mathfrak{B}(\overline{C^\sigma}, \overline{\Phi r^\tau}) = w$. Nach IV ist dies genau dann der Fall, wenn es ein $C^\sigma \varepsilon K^\sigma$ gibt mit $\Phi_2\mathfrak{B}(\overline{C^\sigma}, r^\tau) = w$, d.h. wenn $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) = w$.

12.2.6. Für $\mathfrak{A}(r^\tau) = \lambda x_1^\sigma 1 \ldots x_n^\sigma n\mathfrak{B}(r^\tau, x_1^\sigma 1, \ldots, x_n^\sigma n)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau}) &= \{\langle C_1^\sigma 1, \ldots, C_n^\sigma n\rangle : C_i^\sigma i \varepsilon K^\sigma i \text{ für } i=1,\ldots,n;\\
&\qquad \Phi_2\mathfrak{B}(\overline{\Phi r^\tau}, \overline{C_1^\sigma 1}, \ldots, \overline{C_n^\sigma n}) = w\} \text{ nach } 11.3.7.,\\
&= \{\langle C_1^\sigma 1, \ldots, C_n^\sigma n\rangle : C_i^\sigma i \varepsilon K^\sigma i \text{ für } i=1,\ldots,n;\\
&\qquad \Phi_2\mathfrak{B}(r^\tau, C_1^\sigma 1, \ldots, C_n^\sigma n) = w\} \text{ nach IV},\\
&= \Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) \text{ nach } 11.3.7..
\end{aligned}
$$

12.2.7. Sei nun $\mathfrak{A}(r^\tau) = (\mathfrak{T}_1(r^\tau), \ldots, \mathfrak{T}_m(r^\tau) \in \mathfrak{T}(r^\tau))$, wobei $\mathfrak{T}_1(r^\tau), \ldots, \mathfrak{T}_m(r^\tau)$ V-Ausdrücke der Typen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sind und $\mathfrak{T}(r^\tau)$ ein V-Ausdruck vom Typ $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = \sigma$ ist.

---

1) Lemma 12.2. entspricht dem Lemma 3.4. bei Takahashi [7] und dem Lemma 6.2. bei Prawitz [2].

Der Fall $n = m$, $\sigma = \tau$, $\mathfrak{G}(r^\tau) = r^\tau$ ist eingeschlossen.

12.2.7.1. Ist nun $\mathfrak{A}(r^\tau)$ keine V-uneigentliche Primformel, so ist nach 11.3.8. $\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})$ genau dann w, wenn $\langle \Phi\mathfrak{G}_1(\overline{\Phi r^\tau}),\ldots,\Phi\mathfrak{G}_m(\overline{\Phi r^\tau})\rangle \in \Phi_2\mathfrak{G}(\overline{\Phi r^\tau})$ ist. Nach IV und 12.2.1. ist dies genau dann der Fall, wenn $\langle \Phi\mathfrak{G}_1(r^\tau),\ldots,\Phi\mathfrak{G}_m(r^\tau)\rangle \in \Phi_2\mathfrak{G}(r^\tau)$ ist, d.h. wenn $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) = w$.

12.2.7.2. Ist aber $\mathfrak{A}(r^\tau)$ eine V-uneigentliche Primformel, so ist $\langle \mathfrak{A}(r^\tau),\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})\rangle$ ein V-extensives Paar nach 12.2.1. und 10.3.. Wäre nun $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) \neq \Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})$, so gäbe es nach Lemma 12.1. ein V-Kontraktionspaar $\langle \mathfrak{G}_i(r^\tau),\mathfrak{G}_i(\overline{\Phi r^\tau})\rangle$ von $\langle \mathfrak{A}(r^\tau),\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})\rangle$ mit $\Phi_2\mathfrak{G}_i(r^\tau) \neq \Phi_2\mathfrak{G}_i(\overline{\Phi r^\tau})$. Dies stände im Widerspruch zur IV, denn es ist $\alpha\mathfrak{G}_i(r^\tau) < \alpha\mathfrak{A}(r^\tau)$ nach 10.6..

12.3. <u>Korollar:</u>
Für V-Formeln $\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n})$ und V-Ausdrücke $r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n}$ ist $\Phi_2\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n}) = \Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r_1^{\tau_1}},\ldots,\overline{\Phi r_n^{\tau_n}})$.
Beweis durch triviale Induktion nach n.

12.4. <u>Korollar:</u>
Für jede V-Formel $\mathfrak{A}(r^\tau)$ mit $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) = w$ ist $\Phi_2 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = w$.
Beweis: Nach Lemma 12.2. ist $\Phi_2\mathfrak{A}(r^\tau) = \Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r^\tau})$. Es gibt also nach Lemma 11.4. einen V-Komplex $C^\tau = \overline{\Phi r^\tau}$ mit $\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{C^\tau}) = w$. Mit 11.3.6. ist damit $\Phi_2\bigvee x^\tau\mathfrak{A}(x^\tau) = w$.

12.5. <u>Korollar:</u>
Für jede V-Formel $\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n})$ ist $\Phi_2\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n}) = \Phi_2(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}))$.
Beweis: $\Phi_2(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}))$ ist nach 11.3.8. genau dann w, wenn $\langle \Phi r_1^{\tau_1},\ldots,\Phi r_n^{\tau_n}\rangle \in \Phi_2\, \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n}\mathfrak{A}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n})$ gilt. Weil nach Lemma 11.4. $\Phi r_i^{\tau_i} \in K^{\tau_i}$ für $i=1,\ldots,n$ gilt, ist dies nach 9.1.3. genau dann der Fall, wenn $\Phi_2\mathfrak{A}(\overline{\Phi r_1^{\tau_1}},\ldots,\overline{\Phi r_n^{\tau_n}}) = w$, d.h. wenn $\Phi_2\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1},\ldots,r_n^{\tau_n}) = w$ nach Korollar 12.3..

Die folgenden drei Lemmata betreffen einfache aussagenlogische Eigenschaften von Φ.

12.6. <u>Lemma:</u>[1]
Ist A ein Positivteil der V-Formel $\mathfrak{P}[A]$ und ist $\Phi_2\mathfrak{P}[A] = f$, so ist auch $\Phi_2 A = f$.

Beweis durch Induktion nach der Länge der Positivform $\mathfrak{P}$:
Für $\mathfrak{P} = *_1$, $\mathfrak{P}[A] = A$ ist der Fall klar. Ist $\mathfrak{P}[A] = \mathfrak{P}_0[\neg\neg A]$, so ist nach IV $\Phi_2(\neg\neg A) = f$, d.h. $\Phi_2 A = f$ nach 11.3.4.. Ist $\mathfrak{P}[A]$ schließlich von der Gestalt $\mathfrak{P}_1[A \vee B]$ oder $\mathfrak{P}_2[B \vee A]$, so ist nach IV $\Phi_2(A \vee B) = f$ bzw. $\Phi_2(B \vee A) = f$, d.h. $\Phi_2 A = f$ nach 11.3.5..

12.7. <u>Lemma:</u>[1]
Für V-Formeln $\mathfrak{P}[A]$ und B gilt:
Ist $\Phi_2\mathfrak{P}[A] = f$ und $\Phi_2 B = f$, so ist auch $\Phi_2\mathfrak{P}[B] =$

Beweis durch Induktion nach der Länge der Positivform $\mathfrak{P}$:
Für $\mathfrak{P} = *_1$, $\mathfrak{P}[A] = A$ ist der Fall klar. Ist $\mathfrak{P}[A] = \mathfrak{P}_0[\neg\neg A]$, so beachte man, daß wegen 11.3.4. mit $\Phi_2 B = f$ auch $\Phi_2(\neg\neg B) = f$ ist. Nach IV ist dann $\Phi_2\mathfrak{P}_0[\neg\neg B] = \Phi_2\mathfrak{P}[B] = f$. Ist $\mathfrak{P}[A]$ schließlich von der Gestalt $\mathfrak{P}_1[A \vee C]$ oder $\mathfrak{P}_2[C \vee A]$, so folgt mit 12.7. $\Phi_2 C = f$ und damit $\Phi_2(B \vee C) = \Phi_2(C \vee B) = f$. Nach IV ist dann $\Phi_2\mathfrak{P}_1[B \vee C] = f$ bzw. $\Phi_2\mathfrak{P}_2[C \vee B] = f$, d.h. $\Phi_2\mathfrak{P}[B] = f$.

12.8. <u>Lemma:</u>
Für V-Formeln $\mathfrak{P}[A]$ und B gilt:
Ist $\Phi_2\mathfrak{P}[A] = f$ und $\Phi_2\mathfrak{P}[B] = w$, so ist $\Phi_2 B = w$.

Dies folgt unmittelbar aus Lemma 12.7..

12.9. <u>Hauptlemma über die V-Korrespondenz Φ:</u>
Ist die V-Formel F V-herleitbar, so ist $\Phi_2 F = w$.

Beweis durch Induktion nach der V-Herleitbarkeitsordnung m von F bezüglich einer gegebenen V-Herleitung $\mathfrak{H}$ von F:

---

[1] Die Lemmata 12.6. und 12.7. entsprechen den Lemmata 3.7. und 3.8. bei Takahashi [7].

12.9.1. Ist $m = 0$, so ist $F = \mathfrak{P}_2[\neg P, P]$ ein V-Axiom. Mit $\Phi_2 F = f$ wäre nach 12.6. $\Phi_2 P = \Phi_2(\neg P) = f$, was nach 11.3.4. nicht geht.

12.9.2. Sei jetzt $m > 0$.

12.9.2.1. Letzter V-Grundschluß von $\mathfrak{H}$ sei ein V-Schluß (S1): $\mathfrak{P}[\neg A], \mathfrak{P}[\neg B] \Longrightarrow \mathfrak{P}[\neg(A \vee B)] = F$.
Mit $\Phi_2 F = f$ wäre nach 12.6. $\Phi_2(\neg(A \vee B)) = f$, also nach 11.3.4. und 11.3.5. $\Phi_2 A = \Phi_2 B = w$. Nach IV und 12.8. ist aber $\Phi_2(\neg A) = \Phi_2(\neg B) = w$, was nach 11.3.4. nicht geht.

12.9.2.2. Letzter V-Grundschluß von $\mathfrak{H}$ sei ein V-Schluß (S2): $\mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}(a^\tau)] \Longrightarrow \mathfrak{P}[\neg \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)] = F$, wobei a^τ eine freie Variable ist und a^τ nicht in F auftritt.
Mit $\Phi_2 F = f$ wäre nach 12.6. $\Phi_2 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = w$, und es gäbe nach 11.3.5. einen V-Komplex C^τ mit $\Phi_2 \mathfrak{A}(\bar{C}^\tau) = w$. Nun ist aber $\mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}(a^\tau)] \Longrightarrow \mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}(\bar{C}^\tau)]$ ein regulärer Schluß nach Satz 4.6. und Bemerkung 10.7.4.; es ist also auch $\mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}(\bar{C}^\tau)]$ mit Ordnung m-1 V-herleitbar. Mit der IV und 12.6. würde der Widerspruch $\Phi_2(\neg \mathfrak{A}(\bar{C}^\tau)) = w$ folgen.

12.9.2.3. Letzter V-Grundschluß von $\mathfrak{H}$ sei ein V-Schluß (S3): $\mathfrak{P}[\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)] \vee \mathfrak{A}(r^\tau) \Longrightarrow \mathfrak{P}[\bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau)] = F$.
Mit $\Phi_2 F = f$ wäre nach 12.6. $\Phi_2 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = f$. Mit der IV würde daraus $\Phi_2 \mathfrak{A}(r^\tau) = w$ folgen, was mit 12.4. den Widerspruch $\Phi_2 \bigvee x^\tau \mathfrak{A}(x^\tau) = w$ ergäbe.

12.9.2.4. Letzter V-Grundschluß von $\mathfrak{H}$ sei ein V-Schluß (S4a):
$$\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1}, \dots, r_n^{\tau_n}) \Longrightarrow$$
$$\mathfrak{A}(r_1^{\tau_1}, \dots, r_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}(x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n})).$$
(Der Fall (S4b) erledigt sich ebenso.)
Mit $\Phi_2 F = f$ wäre nach 12.6. und 12.5. $\Phi_2 \mathfrak{A}(r_1^{\tau_1}, \dots, r_n^{\tau_n}) = f$. Das wäre aber ein Widerspruch zur IV und zu 12.8..

12.9.2.5. Letzter V-Grundschluß von $\mathfrak{H}$ sei ein V-Schluß (S5): $F \vee \bigvee x^1 \neg(x^1 \vee \neg x^1) \Longrightarrow F$.
Mit $\Phi_2 F = f$ wäre, bei Berücksichtigung der IV und von 11.3.5., $\Phi_2 \bigvee x^1 \neg(x^1 \vee \neg x^1) = w$. Es gäbe dann nach 11.3.6. einen V-Komplex C^1 mit $\Phi_2((\bar{C}^1 \vee \neg \bar{C}^1)) = w$, was mit 11.3.5. den Widerspruch $\Phi_2 \bar{C}^1 = \Phi_2(\neg \bar{C}^1) = f$ ergäbe.

12.9.2.6. Letzter V-Grundschluß von $\mathfrak{h}$ sei ein V-Schluß (SE):

$F \vee \neg \tilde{r}_i \vee \tilde{s}_i$, $F \vee \neg \tilde{s}_i \vee \tilde{r}_i$ für alle $i=1,\dots,n$ mit $\tau_i \neq o$ $\Longrightarrow$ F,
$F = \mathfrak{P}_2[\neg(r_1^{\tau_1},\dots,r_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)}),(s_1^{\tau_1},\dots,s_n^{\tau_n} \in a^{(\tau_1,\dots,\tau_n)})]$.
Die in $\tilde{r}_i, \tilde{s}_i$ nach 2.2. und 10.7.1. allenfalls auftretenden freien Variablen $a_{i_1}^{i_1},\dots,a_{i_k}^{i_k}$ sind voneinander verschieden und kommen in F nicht vor.
Mit $\Phi_2 F = f$ wäre nach 12.6. und 11.3.4. $\Phi_2(r \in a) \neq \Phi_2(s \in a)$. Es gäbe mithin wegen 12.1. ein V-Kontraktionspaar $\langle \tilde{r}_i', \tilde{s}_i' \rangle$ von $\langle (r \in a),(s \in a) \rangle$ mit $\Phi_2 \tilde{r}_i' \neq \Phi_2 \tilde{s}_i'$. Nach Satz 4.7. und Bemerkung 10.7.2. sind
$F \vee \neg \tilde{r}_i \vee \tilde{s}_i \Longrightarrow F \vee \neg \tilde{r}_i' \vee \tilde{s}_i'$ und
$F \vee \neg \tilde{s}_i \vee \tilde{r}_i \Longrightarrow F \vee \neg \tilde{s}_i' \vee \tilde{r}_i'$ reguläre Schlüsse; es sind also auch $F \vee \neg \tilde{r}_i' \vee \tilde{s}_i'$ und $F \vee \neg \tilde{s}_i' \vee \tilde{r}_i'$ mit Ordnung m-1 V-herleitbar.
Mit der IV und mit der Annahme $\Phi_2 F = f$ erhielte man so den Widerspruch $\Phi_2 \tilde{r}_i' \neq \Phi_2 \tilde{s}_i'$.

Damit ist das Hauptlemma 12.9. bewiesen.[1]

12.10. <u>Korollar:</u>
Ist die echte Formel F herleitbar, so ist $\Phi_2 F = w$.

Beweis: Jede Herleitung ist auch eine V-Herleitung.

12.11. <u>Bemerkung:</u>
Die Beschränkung von Φ_2 auf die Menge der echten Formeln ist keine Semiwertung (insbesondere keine totale Wertung, vgl. § 14)! Die Bedingung 8.1.5. ist verletzt. Ist $\Phi_2 \bigvee x^{\tau}\, \mathfrak{A}(x^{\tau}) = w$, so gibt es zwar einen V-Komplex C^{τ} mit $\Phi_2 \mathfrak{A}(\overline{C^{\tau}}) = w$, aber nicht notwendig einen echten Ausdruck r^{τ} mit dieser Eigenschaft.

---

1) Das Hauptlemma 12.9. entspricht dem Lemma 4.1. bei Takahashi [7].

§ 13. Der Satz von Takahashi und die Schnitteliminierbarkeit

13.1. Satz von Takahashi:
Hat die Formel F bei einer Semiwertung V den Wert VF = f, so ist F nicht herleitbar.

Beweis: Sei V eine Semiwertung gemäß 8.1. mit VF = f. Man definiere die V-Korrespondenz Φ, wie dies in § 11 geschehen ist. Nach 9.8. und 11.4. ist $\Phi F = [F, \Phi_2 F]$ ein V-komplex; mit VF = f ist also auch $\Phi_2 F = f$. Nach dem Korollar 12.10. ist dann F nicht herleitbar.

13.2. Semantisches Hauptlemma (aus § 8):
Ist die Formel F nicht streng herleitbar, so gibt es eine Semiwertung V mit VF = f.

13.3. Hauptsatz über die Schnitteliminierbarkeit:
Jede herleitbare Formel ist streng herleitbar.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus 13.1. und 13.2..

KAPITEL IV: DISKUSSION DES BEWEISGANGS IN BEZIEHUNG ZUM ANSATZ VON PRAWITZ

§ 14. Die Stellung der semantischen Fundamentalvermutungen

Im folgenden sei Σ das in [3] charakterisierte System der einfachen Typenlogik ohne Extensionalität, und Σ_E sei das hier vorliegende System der einfachen Typenlogik mit Extensionalität.

Als syntaktische Fundamentalvermutung[1] bezeichnet man die Behauptung der Schnittfreiheit von Σ bzw. Σ_E:

14.1. Jede herleitbare Formel ist streng herleitbar.

Als starke semantische Fundamentalvermutung werde folgende Aussage über Σ bzw. Σ_E bezeichnet:

14.2. Jede Semiwertung kann zu einer totalen Wertung erweitert werden.[2]

Dann gilt in Σ und Σ_E:

14.3. Satz: Aus der starken semantischen Fundamentalvermutung folgt die syntaktische Fundamentalvermutung, und zwar ohne Benützung irgendeiner Fassung des Auswahlaxioms.[3]

---

[1] nach Takeuti.

[2] Zu den Begriffen 'Semiwertung','totale Wertung in Σ_E vgl. 8.1. und 8.2., zu den Begriffen 'Semiwertung','totale Wertung','partielle Wertung' in Σ und 'Erweiterung' in Σ und Σ_E vgl. [3], 6.1.,6.2.,7.2.,7.7..

[3] Zum Beweis des Satzes 6.3.in [3]: 'Jede Semiwertung kann zu einer partiellen Wertung erweitert werden' wird in korrekter Form das Zorn'sche Lemma benötigt.

Beweis:

14.3.1. Semantisches Hauptlemma: Wenn die Formel F nicht streng herleitbar ist, dann gibt es eine Semiwertung V mit VF = f.
Für Σ_E ist dies das Lemma 8.3.; für Σ der Satz 6.5. in [3]. Es genügt die Existenz einer Semiwertung, womit der Satz 6.3. in [3] umgangen ist.[2]

14.3.2. Wenn F in einer totalen Wertung W den Wert WF = f besitzt, dann ist F nicht herleitbar.
Für Σ läßt sich dies ohne Verwendung von 6.3. zeigen: Sei F herleitbar. Dann ist F∨E [1] nach [3], 7.1. streng herleitbar. Nach dem Konsistenzsatz [3], 6.6. gibt es damit keine partielle Wertung V mit V(F∨E) = f. Ist also W eine totale Wertung, d.h. WE = f nach [3], 7.3., dann ist WF = w.
Für Σ_E gilt 14.3.2. ebenfalls; denn die Sätze 7.1.,6.6. und 7.3. in [3] sind mit kleinen Ergänzungen auf Σ_E übertragbar.

14.3.3. Aus der starken semantischen Fundamentalvermutung folgt mit 14.3.1. und 14.3.2. die syntaktische Fundamentalvermutung.
Damit ist 14.3. für Σ und Σ_E bewiesen.

Als <u>(schwache) semantische Fundamentalvermutung</u> werde folgende Aussage über Σ bezeichnet:

14.4. Jede partielle Wertung kann zu einer totalen Wertung erweitert werden.

Das Theorem IV, 7.8. in [3] garantiert die Äquivalenz von 14.1. und 14.4., aber unter Benützung von [3], 6.3.. Für die Schnittfreiheit von Σ würde also der Beweis der (schwachen) semantischen Fundamentalvermutung genügen, wenn man das Auswahlaxiom zugrundelegt.

---

[1] vgl. [3], 7.1..
[2] vgl. Fußnote 3, S.42.

Prawitz umgeht diese Schwierigkeit in [2], indem er sich auf den Satz 14.3. stützt und für Σ die <u>starke</u> semantische Fundamentalvermutung beweist.
(Auch Takahashi arbeitet in [7] mit Semiwertungen und kommt ohne Auswahlaxiom aus.)

In § 15 wird untersucht wrrden, ob der Weg von Prawitz auch in Σ_E gangbar ist.

<u>§ 15. Der Ansatz von Prawitz</u>

Im Kapitel III ist gezeigt worden, daß der Beweisgang von Takahashi in [7] für Σ auf Σ_E übertragbar ist.
Für den Prawitz'schen Gedankengang gilt dies nicht in gleicher Weise.

15.1. Die Konstruktion von Prawitz für Σ in [2] verläuft zunächst wie die von Takahashi in [7].1)
Zu einer gegebenen Semiwertung V werden V-Komplexe als Paare [e,E] eingeführt, wobei E ein 'möglicher Wert' des Ausdrucks e ist. Den V-Komplexen werden eineindeutig neue Konstanten ('Namen') zugeordnet.
S bezeichnet dann die kleinste Basismenge von der Art, daß alle Formeln, die durch V einen Wert erhalten, zu dem von S abhängigen Formelsystem gehören.
S_o bezeichnet die Menge der neuen Konstanten. (S_o ist i.a. überabzählbar.)
Allen Ausdrücken e über $S_1 = S \;\; S_o$ wird ein Wert We zugeordnet; W entspricht genau der Funktion Φ_2 bei Takahashi.
Die Beschränkung W' von W auf die Menge der Formeln über S_1 ist eine totale Wertung und eine Erweiterung von V.
W' wird dann auf eine Wertung V' bezüglich einer abzählbaren Basis reduziert, V' stellt immer noch eine totale Erweiterung von V dar.
Damit hat Prawitz das starke semantische Hauptlemma 14.2. für Σ bewiesen, aus dem nach Satz 14.3. die Schnittfreiheit folgt.

---

1) vgl. die vereinfachende Modifikation von Schütte in [5].

15.2. Kapitel III zeigt, daß man in Σ_E zunächst ganz ähnlich vorgehen kann. Die in § 11 definierte Funktion Φ_2 hat dieselbe Stellung in Σ_E wie die Funktion W aus [2] in Σ.
Wenn S, S_0 und S_1 entsprechend für Σ_E definiert werden, hat man nun zu zeigen, daß die Beschränkung Φ_2' von Φ_2 auf die Menge der V-Formeln über S_1 eine totale Wertung ist. (Φ_2' könnte dann durch dieselbe Konstruktion wie in [2], §7, auf eine totale Erweiterung V' von V bezüglich einer abzählbaren Basis reduziert werden.)

<u>Φ_2' ist aber keine totale Wertung</u>, da die Extensionalitätsbedingung 8.1.9. für Φ_2' nicht erfüllt ist, sofern man die Namen der V-Komplexe wie Konstanten behandelt.[1]
(Die Bedingungen 8.1.1. bis 8.1.8. für Φ_2' sind erfüllt, was leicht aus 11.3.4. bis 11.3.6. und 12.1. bis 12.4. folgt.)

Die Schwierigkeit liegt im Status der V-Formeln von der Gestalt $(r_1^{\tau}1,\ldots,r_n^{\tau}n \in \bar{C}^{\tau})$, wobei C^{τ} ein V-Komplex vom Typ $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n) \neq (0,\ldots,0)$ ist. Behandelt man die Namen der V-Komplexe generell wie Konstanten, so müssen diese Formeln als 'V-uneigentliche Primformeln' klassifiziert werden. Damit wird das Extensionalitätslemma 12.1. hinfällig, und Φ_2' ist keine totale Wertung.

In Kapitel III wurde ein anderer Weg eingeschlagen: V-Formeln der obigen Gestalt wurden zu den V-eigentlichen Primformeln gerechnet, die von der Extensionalitätsbedingung nicht betroffen sind. Freilich mußte dann auch der Herleitbarkeitsbegriff für V-Formeln entsprechend abgeändert werden. Der Beweisgang nac Takahashi blieb davon unbeeinflußt.

Da der Beweisverlauf bei Takahashi direkter ist als bei Prawitz (z.B. ist keine nachträgliche Reduktion der Wertung auf eine abzählbare Basis nötig), erschien das in Kapitel III durchgeführte Verfahren gerechtfertigt.

---

1) vgl. § 10.

§ 16. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit überträgt einen nichtkonstruktiven semantischen Bwweis für die Schnittfreiheit der einfachen Typenlogik, wie er von Takahashi in [7] gegeben wurde, auf die einfache Typenlogik mit Extensionalität.

Das zugrundeliegende formale System Σ_E entsteht aus dem System Σ von Schütte in [3] durch Hinzunahme der Extensionalitätsschlußregel, mit ihrer Hilfe läßt sich die Extensionalität von Σ_E beweisen.

Man kann diejenigen Formeln von Σ_E, die nicht ohne die Schnittregel herleitbar sind, semantisch charakterisieren: es gibt Semiwertungen, bei denen sie den Wert 'falsch' erhalten. Solche Semiwertungen werden im Anschluß an Schütte mit Hilfe von Deduktionsfäden definiert, die invers zu den Grundschlüssen gebildet sind; in Σ_E müssen hier die Extensionalitätsschlüsse berücksichtigt werden.

Zu einer gegebenen Semiwertung V wird nun ähnlich wie bei Takahashi eine Art 'allgemeines Modell' konstruiert. Der zentrale Gedanke bei Takahashi ist die Aufspaltung derjenigen Formeln F, die durch V keinen Wert erhalten, in zwei Paare [F,w] und [F,f] (ähnlich für höhere Typen). Man gelangt so zum (nichtkonstruktiven) Begriff der V-Komplexe.

Jetzt kann man die Semiwertung V zu einer Funktion Φ_2 fortsetzen, die V-Komplexe als Werte hat. Φ_2 besitzt viele Eigenschaften einer totalen Wertung; insbesondere ist Φ_2 extensional. Es erweist sich, daß jede herleitbare Formel bei Φ_2 den Wert 'wahr' erhält.

Damit ist klar, wie die Schnittfreiheit folgt:
Ist F eine Formel, die nicht ohne die Schnittregel herleitbar ist, so gibt es eine Semiwertung V mit VF = f. Dann ist aber auch $\Phi_2 F = f$, und F kann nicht herleitbar sein. Also ist jede herleitbare Formel ohne die Schnittregel herleitbar.

Der Beweisgang nach Prawitz [2] für die Schnittfreiheit von Σ, der das semantische Äquivalent von Schütte [3] benützt, ist wegen einer technischen Schwierigkeit, die die Extensionalität betrifft, auf dem hier eingeschlagenen Weg nicht auf Σ_E übertragbar.

Literatur:

[1] DAG PRAWITZ, completeness and Hauptsatz for second order logic, Theoria, vol.33 (1967), pp. 246-258.

[2] DAG PRAWITZ, Hauptsatz for higher order logic, The Journal of Symbolic Logic, vol.33, no.3 (1968), pp. 452-457.

[3] KURT SCHÜTTE, Syntactical and semantical properties of simple type-theory, The Journal of Symbolic Logic, vol.25, no.4 (1960), pp. 305-326.

[4] KURT SCHÜTTE, Beweistheorie, Springer-Verlag 1960.

[5] KURT SCHÜTTE, Ein Beweis von Takahashi für die Schnitteliminierbarkeit in der einfachen Typenlogik, Seminar-Manuskript der Universität München vom Wintersemester 1968/69. (Es handelt sich um eine vereinfachende Modifikation von [7] .)

[6] WILLIAM TAIT, A nonconstructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate logic, Bulletin of American Mathematical Society, vol.72 (1966), pp. 980-983.

[7] MOTO-O TAKAHASHI, A proof of cut-elimination theorem in simple type-theory, Journal of the Mathematical Society of Japan, vol.19, no.4 (1967), pp. 399-410.

[8] MOTO-O TAKAHASHI, Simple type-theory of Gentzen style with the inference of extensionality, unveröffentlicht.

[9] GAISI TAKEUTI, On a generalized logical calculus, Japanese Journal of Mathematics, vol.32 (1953), pp. 39-96. (Errata, ibid., vol.24 (1954), pp. 149-156.)